

# Martinović-ETF

*By* Luka Martinović

---

WORD COUNT

42578

TIME SUBMITTED

10-MAY-2024 09:20AM

PAPER ID

108874153

UNIVERZITET CRNE GORE  
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

Luka Martinović

**KOOPERATIVNO UPRAVLJANJE HETEROGENIM  
MULTIAGENTNIM SISTEMIMA BEZ RAZMJENE  
STANJA KONTROLERA**

– Doktorska disertacija –

Podgorica, 2024. godine

UNIVERSITY OF MONTENEGRO  
FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING

Luka Martinović

**COOPERATIVE CONTROL OF HETEROGENEOUS  
MULTIAGENT SYSTEMS WITHOUT EXCHANGE OF  
CONTROLLER STATES**

– A thesis submitted for the degree of *Doctor of Philosophy* –

Podgorica, 2024

PODACI O DOKTORANDU, MENTORU I ČLANOVIMA KOMISIJE

DOKTORAND

Ime i prezime: **Luka Martinović**

Datum i mjesto rođenja: **11.11.1996. godine, Bar, Crna Gora**

Naziv završenog postdiplomskog studijskog programa: **Elektrotehnički fakultet, odsjek *Energetika i automatika*, smjer *Automatika* - magistarske studije**

Godina završetka: **2021.**

MENTOR: **dr Božo Krstajić**, redovni profesor, Univerzitet Crne Gore, Elektrotehnički fakultet

KOMISIJA ZA OCJENU PODOBNOSTI TEZE I KANDIDATA: **dr Milovan Radulović**, redovni profesor, Univerzitet Crne Gore, Elektrotehnički fakultet  
**dr Božo Krstajić**, redovni profesor, Univerzitet Crne Gore, Elektrotehnički fakultet  
**dr Žarko Zečević**, vanredni profesor, Univerzitet Crne Gore, Elektrotehnički fakultet

KOMISIJA ZA OCJENU DOKTORSKE DISERTACIJE:

KOMISIJA ZA ODBRANU DOKTORSKE DISERTACIJE:

DATUM ODBRANE: \_\_\_\_\_

## PODACI O DOKTORSKOJ DISERTACIJI

Naziv doktorskih studija:	<b>Doktorske studije elektrotehnike</b>
Naslov doktorske disertacije:	<b>Kooperativno upravljanje heterogenim multiagentnim sistemima bez razmjene stanja kontrolera</b>
Ključne riječi:	Multiagentni sistemi, kooperativno upravljanje, distribuirani opserver, kooperativna regulacija izlaza, output containment control, $\mathcal{H}_\infty$ sinteza, algebarske Rikatijske jednačine, linearne matrične nejednačine
Datum prijave doktorske teze:	<b>06.06.2022. godine</b>
Datum sjednice Senata UCG na kojoj je prihvaćena teza:	<b>16.09.2022. godine</b>
Naučna oblast:	<b>Elektrotehnika</b>
Uža naučna oblast:	<b>Automatika</b>

### REZIME:

U doktorskoj disertaciji se razmatra kooperativno upravljanje heterogenim multiagentnim sistemima sa opštom linearnom dinamikom i usmjerenom komunikacionom topologijom. Konkretno, dati su predlozi originalnih distribuiranih kontrolera kojima se rješavaju dva relevantna problema upravljanja: kooperativna regulacija izlaza i *output containment control*. Predloženi upravljački zakoni su zasnovani na pretpostavci da stanja kontrolera susjednih agenata nisu dostupna za dizajn, već da agenti raspolažu samo informacijama o izlazima svojih susjeda. Jedna od ključnih prednosti ovakvog pristupa ogleđa se u značajnom smanjenju ili čak potpunoj eliminaciji komunikacije između agenata, zavisno od tipa senzora koji se koriste prilikom implementacije. U tezi su prezentovane i metode za sintezu parametara predloženih kontrolera koje se zasnivaju na rješavanju Rikatijskih jednačina i linearnih matričnih nejednačina. Pored toga, dokazano je da se rješivost razmatranih problema predloženim upravljačkim protokolima može garantovati za različite klase sistema od praktičnog interesa. Takođe su prezentovani i rezultati numeričkih simulacija koji potvrđuju teorijske zaključke i demonstriraju efikasnost predloženih kontrolera i postupaka za njihovu sintezu.

UDK:

## INFORMATION ON DOCTORAL DISSERTATION

PhD study program:	<b>PhD studies in Electrical Engineering</b>
Dissertation title:	<b>Cooperative Control of Heterogeneous Multiagent Systems Without Exchange of Controller States</b>
Keywords:	Multiagent systems, cooperative control, distributed observer, cooperative output regulation, output containment control, $\mathcal{H}_\infty$ synthesis, algebraic Riccati equations, linear matrix inequalities
Thesis application date:	<b>06.06.2022.</b>
Thesis acceptance date (UoM Senate Session):	<b>16.09.2022.</b>
Scientific area:	<b>Electrical Engineering</b>
Specific scientific area:	<b>Control Systems</b>

### ABSTRACT:

In this thesis, the cooperative control of heterogeneous multiagent systems with general linear dynamics and directed communication topology is considered. Novel distributed controllers are introduced to address two relevant control problems: cooperative output regulation and output containment control. The distinctive feature of the proposed solutions is that they do not require the exchange of controller states over the underlying communication network. Instead, only output measurements are exchanged among the agents, thus significantly reducing or completely eliminating communication burden, depending on the type of sensors used in the implementation. Additionally, novel controller synthesis methods based on solving algebraic Riccati equations and linear matrix inequalities are presented. It has been proven that the solvability of the considered control problems by the proposed controllers can be guaranteed for a wide class of systems of practical interest. Simulation results are provided to validate the theoretical findings and demonstrate the effectiveness of the proposed controllers and controller synthesis methods.

UDK:

# Sadržaj

<b>Spisak slika</b>	<b>iii</b>
<b>Spisak algoritama</b>	<b>v</b>
<b>Oznake</b>	<b>vi</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Kooperativno upravljanje multiagentnim sistemima</b>	<b>6</b>
1.1 Multiagentni sistemi . . . . .	6
1.2 Grafovi i distribuirano upravljanje . . . . .	10
1.2.1 Teorija grafova . . . . .	12
1.2.2 Distribuirana šema upravljanja . . . . .	14
1.3 Kooperativno upravljanje . . . . .	16
1.4 Distribuirani opserver stanja . . . . .	22
1.4.1 Sinteza distribuiranih upravljačkih zakona . . . . .	22
1.4.2 Distribuirani opserver stanja egzosistema . . . . .	26
1.4.3 Primjer dizajna distribuiranog opservera . . . . .	28
<b>2 Kooperativna regulacija izlaza u linearnim multiagentnim sistema</b>	<b>31</b>
2.1 Klasični problem regulacije izlaza linearnog sistema . . . . .	31
2.1.1 Postavka problema . . . . .	32
2.1.2 Sinteza upravljačkog zakona . . . . .	34
2.2 Kooperativna regulacija izlaza u linearnim multiagentnim sistemima . . . . .	44
2.2.1 Problem kooperativne regulacije izlaza u linearnim multiagentnim sistemima . . . . .	45
2.2.2 Sinteza upravljačkog zakona zasnovanog na distribuiranom opserveru stanja egzosistema . . . . .	49

2.2.3	Primjena COR-a u regulaciji snage mikromreža povezanih na glavnu mrežu . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Kooperativna regulacija izlaza u linearnim multiagentnim sistemima bez razmjene stanja kontrolera</b>	<b>58</b>
3.1	Uvod . . . . .	58
3.2	Osnovni pojmovi i postavka problema . . . . .	62
3.3	COR u mrežama neintrospektivnih agenata . . . . .	66
3.3.1	Analiza stabilnosti . . . . .	68
3.3.2	Sinteza kontrolera . . . . .	71
3.4	COR u mrežama introspektivnih agenata . . . . .	74
3.4.1	Analiza stabilnosti . . . . .	76
3.4.2	Sinteza kontrolera . . . . .	78
3.5	Analiza rješivosti . . . . .	79
<b>4</b>	<b>Output containment control u multiagentnim sistemima bez razmjene stanja kontrolera</b>	<b>86</b>
4.1	Uvod . . . . .	86
4.2	Osnovni pojmovi i postavka problema . . . . .	89
4.2.1	Teorija grafova . . . . .	89
4.2.2	Dinamika multiagentnog sistema . . . . .	91
4.2.3	Postavka OCC problema . . . . .	93
4.3	OCC kontroler zasnovan na distribuiranom opserveru . . . . .	94
4.3.1	Analiza stabilnosti . . . . .	98
4.3.2	Sinteza kontrolera . . . . .	100
4.4	Analiza rješivosti . . . . .	106
4.4.1	Analiza rješivosti iz perspektive dinamike lidera . . . . .	106
4.4.2	Analiza rješivosti iz perspektive dinamike pratilaca . . . . .	107
4.4.3	Analiza rješivosti za aciklične grafove . . . . .	108
<b>5</b>	<b>Rezultati simulacija</b>	<b>109</b>
5.1	COR problem . . . . .	109
5.2	OCC problem . . . . .	119
	<b>Zaključak</b>	<b>129</b>
	<b>Bibliografija</b>	<b>132</b>



# Spisak slika

1.1	Centralizovana šema upravljanja. . . . .	11
1.2	Decentralizovana šema upravljanja. . . . .	12
1.3	Povezan graf $\mathcal{G}_1$ , neusmjeren graf $\mathcal{G}_2$ , kompletan graf $\mathcal{G}_3$ i stablo graf $\mathcal{G}_4$ . . .	13
1.4	Distribuirana šema upravljanja. . . . .	15
1.5	(a) Centralizovano upravljanje, (b) Decentralizovano upravljanje, (c) Distribuirano upravljanje. . . . .	15
1.6	Primjer formacije multiagentnog sistema sa liderom. Lider je označen indeksom 0, dok su vozila 1 – 4 pratioci. . . . .	20
1.7	Željena formacija multiagentnog sistema sa liderom. . . . .	21
1.8	Decentralizovana šema upravljanja. . . . .	24
1.9	Šema upravljanja zasnovana na distribuiranom opserversu. . . . .	25
1.10	Komunikacioni graf koji zadovoljava Pretpostavku 1.1. . . . .	28
1.11	Greška distribuiranog opserversa (1.40) u estimaciji stanja egzosistema. . . .	29
1.12	Greška distribuiranog opserversa (1.42) u estimaciji stanja egzosistema. . . .	30
2.1	Šema upravljanja sa povratnom spregom. . . . .	32
2.2	Mikromreža povezana na glavnu mrežu. . . . .	53
2.3	Komunikacioni graf $\mathcal{G}$ . . . . .	55
2.4	Vremenske karakteristike željene ( $P_0(t), Q_0(t)$ ) i stvarne snage ( $P_i(t), Q_i(t)$ ) DDG-ova. . . . .	57
2.5	Razlika između stvarne i željene snage $P_i(t) - P_0(t)$ . . . . .	57
3.1	Najveća singularna vrijednost sistema $G(s)$ u zavisnosti od frekvencije. Sistem ima dva para konjugovano kompleksnih polova na imaginarnoj osi ( $\pm j\omega_1$ i $\pm j\omega_2$ ), pri čemu je $\mu^{-1} = 100$ i $\chi = \mu^{-1} + 0.01$ . . . . .	82
5.1	Greške agenata u praćenju referentnog signala u slučaju kada se koristi ROF protokol. . . . .	112

5.2	Izlazi agenata (puna linija) i referentna trajektorija (isprekidana linija) u slučaju kada se koristi ROF protokol. . . . .	113
5.3	Greške agenata u praćenju referentnog signala u slučaju kada se koristi OF protokol. . . . .	114
5.4	Izlazi agenata (puna linija) i referentna trajektorija (isprekidana linija) u slučaju kada se koristi OF protokol. . . . .	115
5.5	MSE za različite vrijednosti parametra $\epsilon_i$ . . . . .	116
5.6	MSE za različite vrijednosti parametra $\delta_i$ . . . . .	117
5.7	Greške agenata u praćenju referentnog signala u slučaju ROF protokola kada su matrice egzosistema nestabilne. . . . .	118
5.8	Greške agenata u praćenju referentnog signala u slučaju OF protokola kada su matrice egzosistema nestabilne. . . . .	118
5.9	Lokalne <i>containment</i> greške agenata. . . . .	121
5.10	Izlazni signali pratilaca i konveksni omotač definisan izlazima lidera. . . . .	122
5.11	Stanja pratilaca (puna linija) i opservera (isprekidana linija). . . . .	122
5.12	Stanja lokalnog opservera poremećaja svakog agenta (puna linija) i stanja egzosistema koji generiše poremećaj (isprekidana linija). . . . .	123
5.13	Stanja distribuiranog opservera (puna linija) i konveksna kombinacija stanja lidera (isprekidana linija). . . . .	123
5.14	Trajektorije lidera i pratilaca u ravni. Lideri su označeni trouglovima i kreću se po eliptičnim putanjama, pri čemu formiraju konveksni omotač u obliku vremenski-promjenljivog trougla. Pratioci konvergiraju ka ovom trouglu i ostaju unutar njega. . . . .	126
5.15	Lokalne <i>containment</i> greške agenata. . . . .	126
5.16	Komparacija <i>containment</i> greške prvog agenta u slučajevima kada se za dizajn koriste predloženi metod (puna linija) i <i>low-gain</i> metod (isprekidana linija). . . . .	127
5.17	Komparacija srednje apsolutne <i>containment</i> greške u slučajevima kada se za dizajn koriste predloženi metod (puna linija) i <i>low-gain</i> metod (isprekidana linija). . . . .	128

# Spisak algoritama

3.1	$\mathcal{H}_\infty$ Static Output Feedback (SOF) algoritam za određivanje pojačanja COR kontrolera . . . . .	73
3.2	Sinteza ROF kontrolera . . . . .	74
3.3	Sinteza OF kontrolera . . . . .	79
4.1	$\mathcal{H}_\infty$ Static Output Feedback (SOF) algoritam za određivanje pojačanja OCC kontrolera . . . . .	105
4.2	Sinteza OCC kontrolera . . . . .	106

# Oznake

Sa  $\mathbb{R}$  je označen skup svih realnih brojeva, dok  $\mathbb{C}$  označava skup svih kompleksnih brojeva. Skup kompleksnih brojeva sa negativnim realnim dijelom je označen sa  $\mathbb{C}^-$ , dok je  $\mathbb{C}^+$  skup kompleksnih brojeva sa pozitivnim realnim dijelom. Skup kompleksnih brojeva sa nenegativnim realnim dijelom je označen sa  $\bar{\mathbb{C}}^+$ . Oznaka za imaginarni broj je  $j$ , dok  $\text{Re}(s)$  predstavlja realni dio kompleksnog broja  $s$ .

Sa  $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je označena jedinična matrica, dok je  $0_{m \times n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  matrica nula. Dalje,  $1_n \in \mathbb{R}^n$  je vektor jedinica, dok je  $0_n \in \mathbb{R}^n$  vektor nula. Ukoliko nema konfuzije oko dimenzija, indeks neće biti pisan. Apsolutna vrijednost matrice se definiše kao  $|M| = [|m_{ij}|] \in \mathbb{R}^{p \times q}$ , gdje je  $M = [m_{ij}] \in \mathbb{R}^{p \times q}$ . Rang matrice  $M$  je označen sa  $\text{rank}M$ , dok je  $M^T$  matrica dobijena transponovanjem matrice  $M$ . Za vektore  $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, \dots, x_N \in \mathbb{R}^{n_N}$ , operator  $\text{col}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ , ili kraće  $\text{col}(x_i)$ , je definisan na sljedeći način  $\text{col}(x_i) = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_N^T]^T$ . Operator  $\text{diag}(\cdot)$  gradi (blok) dijagonalnu matricu od svojih argumenata. Operator  $\text{vec}(\cdot)$  je definisan na takav način da je  $\text{vec}(A) = \text{col}(A_1, \dots, A_n)$ , gdje je  $A_i$   $i$ -ta kolona matrice  $A$  koja se sastoji od  $n$  kolona.

Za kvadratnu matricu  $A$ ,  $\det(A)$  predstavlja njenu determinantu, dok je  $\lambda(A)$  skup svih sopstvenih vrijednosti (spektar) matrice  $A$ . Sa  $\lambda_i(A)$  je označena  $i$ -ta sopstvena vrijednost, dok  $\rho(A)$  predstavlja spektralni radijus matrice  $A$ . Za simetričnu matricu  $P$ , piše se  $P > 0$  ( $P \leq 0$ ) ukoliko je pozitivno (negativno) (semi)definitna. Kvadratna matrica  $A$  je Hurwitz stabilna ako sve njene sopstvene vrijednosti leže u lijevoj poluravni kompleksne ravni, tj. ako je negativno definitna. S druge strane, za kvadratnu matricu kažemo da je anti-Hurwitz stabilna ukoliko ima bar jednu sopstvenu vrijednost u  $\bar{\mathbb{C}}^+$ . Realna kvadratna matrica  $M$ , čiji su elementi van glavne dijagonale nenegativni naziva se Metzlerovom matricom.

Kronekerov proizvod dvije matrice  $A$  i  $B$  je označen sa  $A \otimes B$  i definisan na sljedeći način

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nm}B \end{bmatrix},$$

gdje je  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$  i  $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ . Sljedeće osobine Kronekerovog proizvoda se koriste u radu:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD),$$

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T,$$

$$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C.$$

Štaviše, ukoliko su  $A$  i  $B$  nesingularne matrice, tada važi

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

Za stabilan MIMO sistem čija je funkcija prenosa  $G(s)$ ,  $\|G(j\omega)\|$  označava njenu najveću singularnu vrijednost u zavisnosti od frekvencije  $\omega$ , dok  $\|G\|_\infty$  predstavlja njenu  $\mathcal{H}_\infty$  normu.

# Uvod

Tokom prethodne dvije decenije, kooperativno upravljanje multiagentnim sistemima privuklo je značajnu pažnju istraživača i postalo jedna od centralnih istraživačkih tema u automatiki. Glavni razlog velikog interesovanja za ovu oblast leži u njenoj raznovrsnoj praktičnoj primjeni, uslovljenoj rješavanjem brojnih teorijskih izazova koji se javljaju pri upravljanju multiagentnim sistemima. Multirobotski sistemi, jata dronova, senzorske mreže i elektroenergetski sistemi su samo neki primjeri kompleksnih sistema u kojima tehnike kooperativnog upravljanja pronalaze primjenu. Sa sistemske tačke gledišta, multiagentni sistem se sastoji od grupe agenata (dinamičkih podistema), pri čemu svaki individualni podsystem predstavlja konvencionalni sistem automatskog upravljanja. Međutim, da bi se postigli zajednički ciljevi na nivou grupe, neophodno je da agenti međusobno interaguju i razmjenjuju informacije, zbog čega se nametnula potreba za uvođenjem novih tehnika za modelovanje i upravljanje ovakvim sistemima.

U multiagentnim sistemima, agenti međusobno razmjenjuju sopstvena mjerenja i druge informacije od interesa putem komunikacione mreže. U realnim scenarijima, pojedinačni agent najčešće nije u mogućnosti da uspostavi komunikaciju sa svim ostalim agentima u mreži, pa samim tim nije moguće implementirati konvencionalne centralizovane ili potpuno decentralizovane šeme upravljanja. Iz tog razloga se za upravljanje multiagentnim sistemima najčešće koriste distribuirani upravljački algoritmi, odnosno distribuirani upravljački protokoli. Distribuirani upravljački algoritam se izvršava na svim agentima, pri čemu pojedinačni agent za izvršavanje svog dijela algoritma koristi informacije do kojih samostalno dolazi, kao i one informacije koje dobija od drugih agenata. Komunikaciona topologija između agenata na nivou cjelokupnog multiagentnog sistema se matematički modeluje komunikacionim grafovima. Samim tim, prilikom dizajniranja distribuiranih kontrolera, neophodno je uzeti u obzir kumulativni efekat dinamike svih agenata u komunikacionoj mreži, kao i topologiju same mreže.

Istraživanja u oblasti multiagentnih sistema su se u svojoj ranoj fazi odnosila na mreže

agenata sa identičnom i jednostavnom dinamikom, da bi danas istraživački fokus bio na kompleksnim sistemima koje karakteriše heterogenost i složena dinamika agenata, neodređenost dinamičkih modela, eksterni poremećaji, vremenski-promjenljive komunikacione topologije i slično. Jednostavniji upravljački ciljevi poput postizanja konsenzusa, sinhronizacije i upravljanja formacijama, prerasli su u sofisticiranije zadatke kao što je istovremeno praćenje željene klase referentnih signala i potiskivanje određene klase poremećaja. Sve ovo je dovelo do formulacije problema kooperativne regulacije izlaza (eng. *cooperative output regulation*, COR), koji je, sa teorijskog aspekta, naročito interesantan zato što se može posmatrati kao generalizacija klasičnog problema regulacije izlaza sistema. Pored toga, brojni problemi u oblasti kooperativnog upravljanja predstavljaju specijalan slučaj ili ekstenziju COR-a, što ga čini jednim od fundamentalnih problema u ovoj oblasti.

Kod kooperativne regulacije izlaza, cilj je da se dizajnira distribuirani upravljački zakon kojim se obezbeđuje da izlazi agenata, koje nazivamo pratiocima, asimptotski prate referentnu trajektoriju u prisustvu eksternih poremećaja. Referentnu trajektoriju generiše agent koji ima ulogu lidera, pri čemu je ova trajektorija dostupna samo određenom broju pratilaca koji ostvaruju direktnu komunikaciju sa liderom. Da bi se COR problem riješio distribuiranim putem, potrebno je da svi pratioci imaju neki vid informacije o referentnom signalu i poremećajima. Shodno tome, u literaturi postoje dva pristupa za rješavanje COR problema: pristup zasnovan na distribuiranom opserveru i pristup zasnovan na principu unutrašnjeg modela. Kod prvog pristupa se vrši sinteza distribuiranog opservera koji pratiocima omogućava estimaciju referentnog signala i poremećaja posredstvom razmjene informacija kroz komunikacionu mrežu. Kod drugog pristupa, unutrašnji modeli referentnog signala/poremećaja se uključuju u lokalne upravljačke zakone agenata, čime se postiže asimptotsko praćenje/potiskivanje željenih klasa signala bez obzira na njihove početne vrijednosti. Oba pristupa rješavanju COR problema imaju svoje prednosti i mane, i gotovo su podjednako izučavani u literaturi tokom prethodnih godina.

Sinteza distribuiranih upravljačkih protokola, bilo da se radi o protokolima zasnovanim na distribuiranom opserveru ili na principu unutrašnjeg modela, prevashodno zavisi od informacija koje su dostupne agentima. Prema tipu mjerenja koja mogu da vrše, agente je moguće podijeliti na introspektivne i neintrospektivne. Introspektivni agenti mogu mjeriti vrijednost sopstvenog izlaza u apsolutnom koordinatnom sistemu, dok neintrospektivni agenti vrše mjerenja izlaza u odnosu na susjedne agente. Samim tim razlikujemo upravljačke protokole koji koriste apsolutna mjerenja i one koji se zasnivaju na relativnim mjerenjima. Većina protokola koji su predloženi u literaturi pored mjerenja izlaza koriste i informacije

o stanjima kontrolera susjednih agenata, pri čemu agenti obje vrste informacija međusobno razmjenjuju putem komunikacione mreže. Da bi se smanjilo komunikaciono opterećenje, posljednjih godina značajna pažnja istraživača je posvećena sintezi upravljačkih protokola koji se zasnivaju samo na razmjeni mjerenja izlaza. Pored toga što smanjuju opterećenje mreže, prednost ovih protokola leži u tome što komunikacija između agenata može biti potpuno eliminisana u scenarijima u kojima agenti pomoću relativnih senzora dobijaju informacije o izlazima susjednih agenata. Međutim, nepoznavanje informacija o stanjima kontrolera susjednih agenata značajno usložnjava analizu spregnutog sistema, jer u tom slučaju dinamiku multiagentnog sistema nije moguće dekomponovati na dinamiku pojedinačnih agenata. U ovakvim scenarijima, koncepti iz  $\mathcal{H}_\infty$  teorije upravljanja i tzv. *low-gain* metod se pokazuju korisnim za sintezu distribuiranih upravljačkih zakona.

U ovoj disertaciji su prezentovani rezultati istraživanja čiji su osnovni ciljevi bili razvoj novih COR upravljačkih protokola za heterogene multiagentne sisteme, kao i razvoj odgovarajuće metodologije za sintezu parametara razvijenih protokola. Za razliku od većine radova u literaturi koji su fokusirani isključivo na mreže neintrospektivnih ili na mreže introspektivnih agenata, u sprovedenim istraživanjima neintrospektivni i introspektivni agenti su tretirani u jedinstvenom teorijskom okviru koji je utemeljen na principima  $\mathcal{H}_\infty$  teorije upravljanja. Konkretno, predložena su dva upravljačka protokola – jedan za rješavanje COR problema u mrežama introspektivnih agenata, i drugi za rješavanje COR problema u mrežama neintrospektivnih agenata. Oba protokola su zasnovana na distribuiranom opserveru i zahtijevaju da agenti međusobno razmjenjuju samo mjerenja izlaza, čime se značano smanjuje komunikaciono opterećenje. Štaviše, u scenarijima u kojima agenti mogu da mjere relativne izlaze jedni u odnosu na druge, predložene protokole je moguće implementirati bez uspostavljanja komunikacije između agenata. U okviru sprovedenih istraživanja razvijena je i metodologija za sintezu parametara predloženih kontrolera. Naime, primjenom  $\mathcal{H}_\infty$  teorije izveden je dovoljan lokalni uslov stabilnosti na nivou svakog agenta, pri čemu su predloženi i algoritmi za određivanje parametara kontrolera u cilju zadovoljenja ovog uslova. U odnosu na postojeća rješenja predloženi protokoli garantuju rješivost COR problema za širu klasu sistema, dok predloženi metod za sintezu parametara pruža veću fleksibilnost pri podešavanju performansi sistema u odnosu na postojeće *low-gain* metode. Konkretno, sprovedena je detaljna analiza i dokazano je da rješivost COR problema unaprijed može biti zagarantovana za: i) introspektivne agente sa opštom linearnom dinamikom, ii) neintrospektivne agente koji su stabilni u otvorenoj sprezi, a sve pod pretpostavkom da referentni signali i poremećaji ne rastu eksponencijalno.



*Ouput containment control* (OCC) predstavlja još jedan često istraživani problem kooperativnog upravljanja multiagentnim sistemima. OCC se može posmatrati kao generalizacija COR-a na multiagentne sisteme koji sadrže više lidera. Kod ovakvih sistema, lideri najčešće imaju zadatak da generišu odgovarajuće referentne trajektorije, dok je pratiocima potrebno upravljati na takav način da njihovi izlazi konvergiraju ka trajektorijama koje se nalaze unutar vremenski-promjenljivog minimalnog konveksnog skupa koji sadrži trajektorije svih lidera. OCC problem je naročito interesantan zbog svoje praktične primjene u multirobotskim sistemima. Naime, u scenarijima gdje grupa robota istražuje neki prostor od interesa, često samo pojedini roboti (lideri) imaju dodatne senzore i mogućnost detektovanja opasnih područja, prepreka i slično. U ovakvim situacijama, lideri imaju zadatak da generišu odgovarajuće trajektorije i njima definišu prostor u okviru kojeg je pratiocima dozvoljeno da se kreću. Da bi se riješio OCC problem, potrebno je izvršiti sintezu odgovarajućeg distribuiranog upravljačkog protokola. Posljednjih godina, predložen je veliki broj OCC protokola kako za homogene, tako i za heterogene multiagentne sisteme. Neki od predloženih protokola se odnose na introspektivne, a neki na neintrospektivne agente, a uglavnom su svi zasnovani na distribuiranom opserveru ili na principu unutrašnjeg modela. Kod većine predloženih protokola se podrazumijeva da su stanja kontrolera susjednih agenata dostupna za dizajn lokalnih kontrolera. Međutim, posljednjih godina značajna pažnja istraživača je usmjerena na sintezu protokola koji se zasnivaju samo na razmjeni izlaznih mjerenja.

U doktorskoj disertaciji su prezentovani i rezultati istraživanja čiji je cilj bio razvoj novog OCC protokola za heterogene multiagentne sisteme u prisustvu eksternih poremećaja, pod pretpostavkom da su samo izlazi susjednih agenata dostupni za sintezu lokalnih kontrolera. Na ovaj način se postiže smanjenje ili potpuna eliminacija komunikacije između agenata, a sve u zavisnosti od tipa senzora koji se koriste u praktičnoj implementaciji. OCC protokol koji je predložen koristi distribuirani opserver za estimaciju konveksne kombinacije stanja lidera, dok se na nivou pojedinačnog agenta koristi lokalni opserver za estimaciju eksternih poremećaja. Takođe, razvijen je novi metod za sintezu parametara kontrolera koji se zasniva na konceptima iz  $\mathcal{H}_\infty$  teorije i algebarskim Rikatičevim jednačinama, i koji omogućava adekvatno podešavanje performansi spregnutog sistema. Teorijske garancije za rješivost OCC problema predloženim protokolom su uspostavljene u dva slučaja: i) kada je dinamika pratilaca minimalno fazna i desno-invertibilna, ii) za egzosteme sa polovima na imaginarnoj osi, dok pratioci mogu imati proizvoljnu linearnu dinamiku.

Doktorska disertacija sadrži pet glava. U prvoj glavi je dat uvod u multiagentne sisteme. Definisana je opšti model multiagentnog sistema i prikazani su neki specijalni slučajevi koji su

od naročito teorijskog i praktičnog interesa. Takođe su definisani osnovni pojmovi iz teorije grafova i formulisana distribuirana šema upravljanja, nakon čega je uveden sistemski pristup sintezi distribuiranih upravljačkih zakona zasnovanih na distribuiranom opserveru.

Problem klasične regulacije izlaza je razmotren u drugoj glavi, pri čemu je poseban akcenat stavljen na sintezu upravljačkog zakona sa spregom po stanjima i upravljačkog zakona zasnovanog na opserveru. Nakon toga je formalno uveden COR problem i diskutovani su potrebni uslovi za njegovu rješivost. Takođe su prezentovani i COR protokoli čija se sinteza zasniva na generalizaciji metoda koje se koriste za rješavanje problema klasične regulacije izlaza.

Treća glava sadrži predloge originalnih distribuiranih COR kontrolera koji su zasnovani na distribuiranom opserveru. Analizirani su introspektivni i neintrospektivni agenti i diskutovana praktična implementacija predloženih rješenja. Prezentovana je i detaljna analiza stabilnosti, na temelju koje su razvijene originalne metode za sintezu parametara predloženih kontrolera. Takođe je analizirana rješivost COR problema predloženim upravljačkim zakonima za različite klase agenata i mrežnih topologija. Rezultati istraživanja prezentovani u ovoj glavi su publikovani u [1].

U četvrtoj glavi je prezentovan novi protokol za rješavanje OCC problema u linearnim heterogenim multiagentnim sistemima na koje djeluju eksterni poremećaji. Izveden je lokalni uslov za stabilnost multiagentnog sistema i predstavljen metod za sintezu parametara predloženog kontrolera. Takođe je izvršena detaljna analiza rješivosti OCC problema predloženim protokolom za različite klase sistema od praktičnog interesa. Rezultati istraživanja prezentovani u ovoj glavi su publikovani u [2].

Peta glava sadrži rezultate numeričkih simulacija u kojima su verifikovani teorijski rezultati i demonstrirana efikasnost predložene metodologije za sintezu kontrolera. Razmotrene su različite mrežne topologije i modeli agenata, kao i neki praktični primjeri multiagentnih sistema. Takođe je izvršena komparacija sa nekim postojećim rješenjima iz literature.

Zaključak sadrži kratak osvrt na najvažnije rezultate i diskusiju o potencijalnim pravcima za buduća istraživanja.

# Glava 1

## Kooperativno upravljanje multiagentnim sistemima

U ovoj glavi je dat uvod u kontinualne multiagentne sisteme. U Poglavlju 1.1 će biti definisan opšti model multiagentnih sistema, kao i neke njihove specijalne forme. Nakon pregleda centralizovanih i decentralizovanih šema upravljanja, u Poglavlju 1.2 će biti uvedeni osnovni pojmovi iz teorije grafova i biće formulisana distribuirana šema upravljanja multiagentnim sistemima. U Poglavlju 1.3 će biti prezentovani neki osnovni problemi kooperativnog upravljanja multiagentnim sistemima. Sistemski pristup sintezi distribuiranih upravljačkih zakona zasnovan na distribuiranom opserversu biće uveden u Poglavlju 1.4.

### 1.1 Multiagentni sistemi

Multiagentni sistem (MAS) se sastoji od grupe individualnih podsistema koji se nazivaju agentima, pri čemu je osnovni zadatak svakog podsistema/agenta postizanje određenog kolektivnog cilja. Opšta reprezentacija svakog podsistema, koji zajedno čine kontinualni multiagentni sistem od  $N$  agenata, data je jednačinama

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_i, u_i, \zeta_{0i}, w_i) \\ y_{mi} &= h_{mi}(x_i, u_i, \zeta_{0i}, w_i), \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \tag{1.1}$$

gdje  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ ,  $y_{mi} \in \mathbb{R}^{p_{mi}}$ ,  $\zeta_{0i} \in \mathbb{R}^{q_i}$  i  $w_i \in \mathbb{R}^{n_{wi}}$  predstavljaju stanje, ulaz, izmjereni izlaz, izlaz egzogenog sistema i nepoznati konstantni vektor  $i$ -tog agenta, respektivno.

Radi jednostavnije analize, podrazumijevaće se da su funkcije  $f_i$  i  $h_{mi}$  globalno definisane

glatke funkcije koje zadovoljavaju uslove  $f_i(0, 0, 0, w_i) = 0$  i  $h_{mi}(0, 0, 0, w_i) = 0$ , za svako  $w_i \in \mathbb{R}^{n_{wi}}$ . Za MAS (1.1) se kaže da je homogen ako je  $f_1 = f_2 = \dots = f_N$  i  $h_{m1} = h_{m2} = \dots = h_{mN}$ , tj. ukoliko svi agenti imaju istu dinamiku. U suprotnom, MAS je heterogen.

Egzogeni signal  $\zeta_{0i}$  se najčešće generiše od strane autonomnog dinamičkog egzogenog sistema (egzosistema) oblika

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_{0i} &= f_{0i}(\zeta_{0i}, w_{0i}) \\ y_{m0i} &= h_{m0i}(\zeta_{0i}, w_{0i}), \quad i = 1, \dots, N,\end{aligned}\tag{1.2}$$

gdje su  $\zeta_{0i} \in \mathbb{R}^{q_i}$ ,  $y_{m0i} \in \mathbb{R}^{p_{m0i}}$  i  $w_{0i} \in \mathbb{R}^{n_{w_{0i}}}$  stanje, izmjereni izlaz i nepoznati konstantni vektor  $i$ -tog egzosistema, respektivno. Funkcije  $f_{0i}$  i  $h_{m0i}$  su globalno definisane glatke funkcije koje zadovoljavaju uslove  $f_{0i}(0, w_{0i}) = 0$  i  $h_{m0i}(0, w_{0i}) = 0$ , za svako  $w_{0i} \in \mathbb{R}^{n_{w_{0i}}}$ .

Uvođenjem oznaka

$$\begin{aligned}\zeta_0 &= \text{col}(\zeta_{01}, \dots, \zeta_{0N}) \\ y_{m0} &= \text{col}(y_{m01}, \dots, y_{m0N}) \\ w_0 &= \text{col}(w_{01}, \dots, w_{0N}) \\ f_0(\zeta_0, w_0) &= \text{col}(f_{01}(\zeta_{01}, w_{01}), \dots, f_{0N}(\zeta_{0N}, w_{0N})) \\ h_{m0}(\zeta_0, w_0) &= \text{col}(h_{m01}(\zeta_{01}, w_{01}), \dots, h_{m0N}(\zeta_{0N}, w_{0N})),\end{aligned}$$

egzosistem (1.2) se može zapisati u kompaktnom obliku

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_0 &= f_0(\zeta_0, w_0) \\ y_{m0} &= h_{m0}(\zeta_0, w_0),\end{aligned}\tag{1.3}$$

gdje je  $\zeta_0 \in \mathbb{R}^q$ ,  $y_{m0} \in \mathbb{R}^{p_{m0}}$  i  $w_0 \in \mathbb{R}^{n_{w_0}}$ , pri čemu je  $q = q_1 + \dots + q_N$ ,  $p_{m0} = p_{m01} + \dots + p_{m0N}$  i  $n_{w_0} = n_{w_{01}} + \dots + n_{w_{0N}}$ .

**Primjedba 1.1.** Iako jednačina (1.3) predstavlja kompaktni zapis jednačine (1.2), radi veće opštosti ona neće biti posmatrana na taj način. Drugim riječima, smatraće se da su funkcije  $f_0$  i  $h_{m0}$  opšte globalno definisane glatke funkcije argumenata  $\zeta_0$  i  $w_0$  koje zadovoljavaju uslove  $f_0(0, w_0) = 0$  i  $h_{m0}(0, w_0) = 0$ , za svako  $w_0 \in \mathbb{R}^{n_{w_0}}$ . Slično, ako se uvede promjenljiva  $w = \text{col}(w_1, \dots, w_N) \in \mathbb{R}^{n_w}$ , gdje je  $n_w = n_{w_1} + \dots + n_{w_N}$ , onda se MAS (1.1) može zapisati u opštijem obliku

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= f_i(x_i, u_i, \zeta_0, w) \\ y_{mi} &= h_{mi}(x_i, u_i, \zeta_0, w), \quad i = 1, \dots, N.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Analogno definiciji funkcija  $f_0$  i  $h_{m0}$ , funkcije  $f_i$  i  $h_{mi}$  u ovom slučaju predstavljaju globalno definisane glatke funkcije argumenata  $x_i$ ,  $u_i$ ,  $\zeta_0$  i  $w$ , za koje važe jednakosti  $f_i(0, 0, 0, w) = 0$  i  $h_{mi}(0, 0, 0, w) = 0$ , za svako  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ .

Sistemi (1.3) i (1.4) se najčešće posmatraju zajedno kao jedinstveni multiagentni sistem koji se sastoji od  $N + 1$  agenata. Egzosistem (1.3) obično služi za generisanje trajektorija-/poremećaja koje agenti (1.4) treba da prate/potiskuju, o čemu će biti riječi kasnije. Iz tog razloga se egzosistem (1.3) naziva liderom, podsistemi (1.4) se nazivaju pratiocima, dok se MAS koji se sastoji od (1.3) i (1.4) naziva MAS sa liderom. S druge strane, ukoliko se MAS sastoji samo od podistema (1.4), tj. ukoliko individualni zadaci pratilaca nisu definisani od strane egzosistema, tada se takav sistem naziva MAS bez lidera [3].

Tri važna specijalna oblika sistema (1.4) koja se često razmatraju u literaturi su:

1. Ojler-Lagranžovi sistemi [4–6]:

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + G_i(q_i) = u_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.5)$$

gdje  $q_i \in \mathbb{R}^n$  i  $u_i \in \mathbb{R}^n$  predstavljaju vektor generalisanih koordinata i vektor generalisanih sila  $i$ -tog agenta, respektivno.

2. Sistemi krutih tijela [7–9]:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{1}{2} q_i \odot Q(\omega_i) \\ J_i \dot{\omega}_i &= -\omega_i^\times J_i \omega_i + u_i, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.6)$$

gdje su  $q_i \in \mathbb{Q}_u$ ,  $\omega_i$ ,  $u_i \in \mathbb{R}^3$  i  $J_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  orijentacija, ugaona brzina, upravljački signal i matrica inercije  $i$ -tog krutog tijela, respektivno, izraženi u lokalnom koordinatnom sistemu tijela. Sa  $\mathbb{Q}_u$  je označen skup svih jediničnih kvaterniona, dok  $\odot$  predstavlja operator množenja kvaterniona koji je definisan u [7, 8].

3. Nelinearni sistemi sa jediničnim relativnim stepenom [10–12]:

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= f_{zi}(z_i, y_i, \zeta_0, w) \\ \dot{y}_i &= f_{yi}(z_i, y_i, \zeta_0, w) + b_i(w)u_i \\ y_{mi} &= y_i, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.7)$$

gdje vektori  $x_i = \text{col}(z_i, y_i) \in \mathbb{R}^{n_{z_i}} \times \mathbb{R}$ ,  $u_i$ ,  $y_{mi} \in \mathbb{R}$  označavaju stanje, upravljački signal i izmjereni izlaz  $i$ -tog agenta, respektivno,  $\zeta_0 \in \mathbb{R}^q$  je egzogeni signal, dok je

$b_i(w) \in \mathbb{R}$  kontinualna funkcija argumenta  $w$ .

Linearni multiagentni sistemi su takođe specijalan slučaj sistema (1.4) i mogu se zapisati u sljedećoj formi

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A_i(w)x_i + B_i(w)u_i + E_i(w)\zeta_0 \\ y_{mi} &= C_{mi}(w)x_i + D_{mi}(w)u_i + F_{mi}(w)\zeta_0, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.8)$$

gdje su  $A_i(w) \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $B_i(w) \in \mathbb{R}^{n_i \times m_i}$ ,  $E_i(w) \in \mathbb{R}^{n_i \times q}$ ,  $C_{mi}(w) \in \mathbb{R}^{p_{mi} \times n_i}$ ,  $D_{mi}(w) \in \mathbb{R}^{p_{mi} \times m_i}$  i  $F_{mi}(w) \in \mathbb{R}^{p_{mi} \times q}$  globalno definisane glatke funkcije argumenta  $w$ . Ovakva reprezentacija se koristi u slučajevima kada model sistema nije egzaktno poznat. Pomoću vektora  $w$  se opisuju varijacije u odnosu na nominalni model sistema koji se dobija u slučaju kada je  $w = 0$  [10].

Ako su parametri sistema egzaktno poznati, tada se model (1.8) svodi na

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A_i x_i + B_i u_i + E_i \zeta_0 \\ y_{mi} &= C_{mi} x_i + D_{mi} u_i + F_{mi} \zeta_0, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.9)$$

gdje su  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $E_i$ ,  $C_{mi}$ ,  $D_{mi}$  i  $F_{mi}$  konstantne matrice. Ako svi agenti imaju identičan model, tj. ako je MAS homogen, tada model (1.9) poprima sljedeći oblik

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A x_i + B u_i + E \zeta_0 \\ y_{mi} &= C_m x_i + D_m u_i + F_m \zeta_0, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.10)$$

gdje su  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $E \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $C_m \in \mathbb{R}^{p_m \times n}$ ,  $D_m \in \mathbb{R}^{p_m \times m}$  i  $F_m \in \mathbb{R}^{p_m \times q}$  matrice odgovarajućih dimenzija. Ako na sistem (1.10) ne djeluju eksterni poremećaji, dobijaju se sljedeći homogeni linearni sistemi:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A x_i + B u_i \\ y_{mi} &= C_m x_i + D_m u_i, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Neki specijalni slučajevi modela u prostoru stanja (1.11) su:

1. Jednostruki integratori:

$$\dot{x}_i = u_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

gdje su  $x_i$ ,  $u_i \in \mathbb{R}^n$ .

2. Dvostruki integratori:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1i} &= x_{2i} \\ \dot{x}_{2i} &= u_i, \quad i = 1, \dots, N,\end{aligned}$$

gdje su  $x_{1i}, x_{2i}, u_i \in \mathbb{R}^n$ .

3. Harmonijski oscilatori:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1i} &= \sigma_i x_{2i} \\ \dot{x}_{2i} &= -\sigma_i x_{1i} + u_i, \quad i = 1, \dots, N,\end{aligned}$$

gdje su  $x_{1i}, x_{2i}, u_i \in \mathbb{R}^n$  i  $\sigma_i > 0$ .

Model egzosistema (1.3) se u specijalnom slučaju svodi na sljedeći linearni sistem

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_0 &= S_0(w_0)\zeta_0 \\ y_{m0} &= W_0(w_0)\zeta_0,\end{aligned}\tag{1.12}$$

gdje su  $S_0(w_0) \in \mathbb{R}^{q \times q}$  i  $W_0(w_0) \in \mathbb{R}^{p_{m0} \times q}$  glatke funkcije argumenta  $w_0$ . Ukoliko su parametri egzosistema egzaktno poznati, tada se (1.12) može zapisati na sljedeći način

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_0 &= S_0\zeta_0 \\ y_{m0} &= W_0\zeta_0,\end{aligned}\tag{1.13}$$

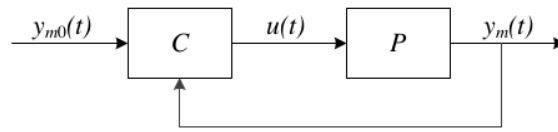
gdje su  $S_0 \in \mathbb{R}^{q \times q}$  i  $W_0 \in \mathbb{R}^{p_{m0} \times q}$  konstantne matrice.

## 1.2 Grafovi i distribuirano upravljanje

U cilju matematički formalnog uvođenja koncepta distribuirane šeme upravljanja, potrebno je prvo krenuti od centralizovane šeme upravljanja. Na početku je potrebno uočiti da se sistem (1.4) može zapisati u standardnoj formi

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \zeta_0, \mathbf{w}) \\ \mathbf{y}_m &= \mathbf{h}_m(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \zeta_0, \mathbf{w}),\end{aligned}\tag{1.14}$$

gdje su  $\mathbf{x} = \text{col}(x_1, \dots, x_N)$ ,  $\mathbf{u} = \text{col}(u_1, \dots, u_N)$  i  $\mathbf{y}_m = \text{col}(y_{m1}, \dots, y_{mN})$  stanje sistema, upravljački signal i izmjereni izlaz, respektivno, dok su  $\mathbf{f} = \text{col}(f_1, \dots, f_N)$  i  $\mathbf{h}_m = \text{col}(h_{m1}, \dots, h_{mN})$  vektorske funkcije pomoću kojih je definisan model sistema. Za sistem automatskog upravljanja u standardnoj formi može se dizajnirati dinamički upravljački



Slika 1.1: Centralizovana šema upravljanja.

zakon sa spregom po mjerenom izlazu

$$\begin{aligned} u &= k(z, y_m, y_{m0}) \\ \dot{z} &= g(z, y_m, y_{m0}), \end{aligned} \quad (1.15)$$

pri čemu su  $k(\cdot)$  i  $g(\cdot)$  globalno definisane glatke funkcije. Ako je dimenzija vektora  $z$  jednaka nuli, onda se (1.15) naziva statičkim upravljačkim zakonom sa spregom po mjerenom izlazu. Upravljački zakon (1.15) sadrži upravljački zakon sa spregom po stanjima kao specijalni slučaj kada je  $y_m = x$ .

Iz izraza (1.15) se može uočiti da je za implementaciju upravljačkog zakona potrebno da svaki agent ima informaciju o izmjerenom izlazu svih ostalih agenata, uključujući i informaciju o izmjerenom izlazu lidera. Drugim riječima, potrebno je da svi agenti međusobno razmjenjuju informacije o sopstvenim mjerenjima. Samim tim, upravljačkom zakonu (1.15) odgovara centralizovana šema upravljanja koja je ilustrovana na slici 1.1.

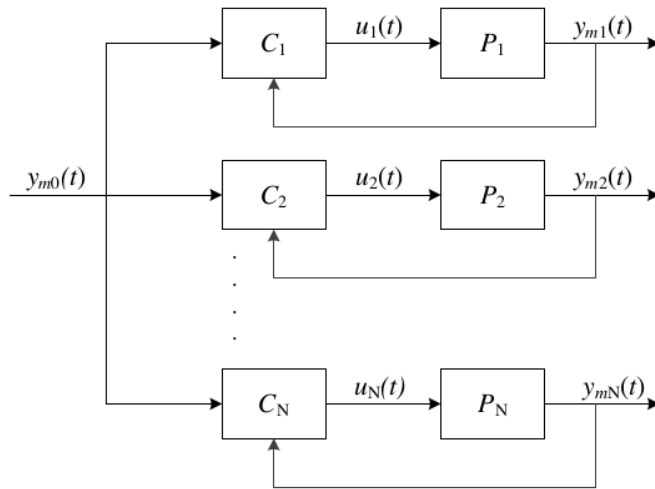
S druge strane, ako pretpostavimo da se u upravljačkom zakonu  $i$ -tog agenta koriste samo mjerenja sopstvenog izlaza i izlaza lidera ( $y_{mi}$  i  $y_{m0}$ ), tada je za svaki agent u mreži moguće dizajnirati upravljački zakon oblika

$$\begin{aligned} u_i &= k_i(z_i, y_{mi}, y_{m0}) \\ \dot{z}_i &= g_i(z_i, y_{mi}, y_{m0}), \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Budući da za implementaciju kontrolera (1.16) nisu potrebne informacije o izlaznim signalima ostalih agenata u mreži, upravljački zakon (1.16) se može predstaviti decentralizovanom šemom upravljanja prikazanoj na slici 1.2.

Da bi se realizovala centralizovana šema upravljanja, potrebno je da svi agenti međusobno razmjenjuju informacije. S druge strane, za realizaciju decentralizovane šeme upravljanja potrebno je da svi agenti uspostave komunikaciju samo sa liderom. Međutim, ni ovaj scenario komunikacije u praksi nije uvijek moguće ostvariti. Na primjer, u realnim multiagentnim sistemima poput grupe vozila, rastojanje između lidera i pojedinih agenata može biti isuviše



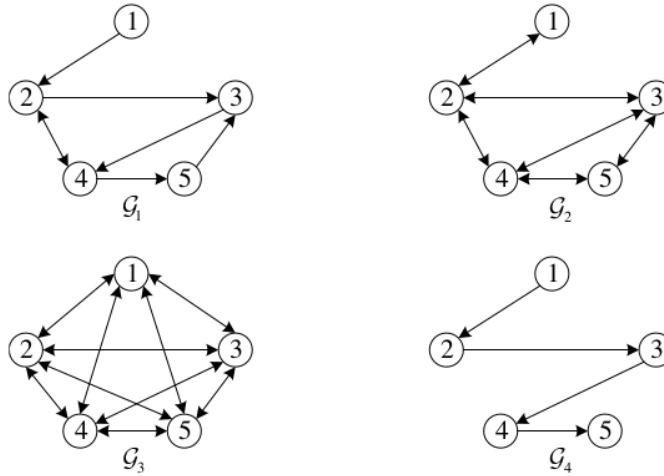


Slika 1.2: Decentralizovana šema upravljanja.

veliko za razmjenu informacija. Kako bi se prevazišlo ovo ograničenje, potrebno je iskoristiti mogućnost razmjene informacija među susjednim agentima, što dovodi do distribuiranog upravljačkog zakona. Da bi matematički formalizovali distribuirani upravljački zakon, potrebno je prvo uvesti neke koncepte iz teorije grafova.

### 1.2.1 Teorija grafova

Graf  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  se sastoji od skupa čvorova  $\mathcal{V} = \{1, \dots, N\}$  i skupa grana  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ . Za  $i, j = 1, 2, \dots, N$ ,  $i \neq j$ , grana usmjerena od čvora  $i$  ka čvoru  $j$  se označava sa  $(i, j)$ , pri čemu se čvor  $i$  naziva roditeljskim čvorom ili susjedom čvora  $j$ . Ovakvom definicijom skupa grana isključena je mogućnost pojave petlji, tj. grana oblika  $(i, i)$ . Sa  $\mathcal{N}_i$  će biti označen podskup skupa  $\mathcal{V}$  koji se sastoji od svih susjeda čvora  $i$ , tj.  $\mathcal{N}_i = \{j : (j, i) \in \mathcal{E}, j \in \mathcal{V}\}$ . Ako graf  $\mathcal{G}$  sadrži niz grana oblika  $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_k, i_{k+1})$ , tada se skup  $\{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_k, i_{k+1})\}$  naziva usmjerenom putanjom od čvora  $i_1$  do čvora  $i_{k+1}$ . Ako je  $i_1 = i_{k+1}$ , tada se putanja naziva ciklusom. Grana  $(i, j)$  je neusmjerena ako važi  $(i, j) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow (j, i) \in \mathcal{E}$ . Graf se naziva neusmjerenim ako je svaka grana iz skupa grana  $\mathcal{E}$  neusmjerena. Za graf se kaže da je kompletan (ili potpun) ako je  $(i, j) \in \mathcal{E}$  za svako  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ . Graf  $\mathcal{G}_s = (\mathcal{V}_s, \mathcal{E}_s)$  je podgraf grafa  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  ako je  $\mathcal{V}_s \subseteq \mathcal{V}$  i  $\mathcal{E}_s \subseteq \mathcal{E} \cap (\mathcal{V}_s \times \mathcal{V}_s)$ . Stablo je graf u kojem svaki čvor ima tačno jedan roditeljski čvor osim jednog čvora koji nazivamo korijenom. Korijen nema roditeljskih čvorova i od njega postoji putanja do svakog drugog čvora. Podgraf  $\mathcal{G}_s = (\mathcal{V}_s, \mathcal{E}_s)$  grafa  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  se naziva razapinjućim stablom grafa  $\mathcal{G}$  ako je  $\mathcal{G}_s$  stablo i  $\mathcal{V}_s = \mathcal{V}$ . Graf  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  sadrži razapinjuće


 Slika 1.3: Povezan graf  $\mathcal{G}_1$ , neusmjeren graf  $\mathcal{G}_2$ , kompletan graf  $\mathcal{G}_3$  i stablo graf  $\mathcal{G}_4$ .

stablo ako postoji podgraf grafa  $\mathcal{G}$  koji je razapinjuće stablo. Matrica  $\mathcal{A} = [a_{ij}]_{i,j=1}^N \in \mathbb{R}^{N \times N}$  se naziva težinskom matricom susjedstva grafa  $\mathcal{G}$ , ako za  $i, j = 1, \dots, N$ , važi sljedeće:  $a_{ii} = 0$ ,  $a_{ij} > 0 \Leftrightarrow (j, i) \in \mathcal{E}$ ,  $a_{ij} = 0 \Leftrightarrow (j, i) \notin \mathcal{E}$  i  $a_{ij} = a_{ji}$  ako je grana  $(i, j)$  neusmjerenjena. Neka je matrica  $\mathcal{L} = [l_{ij}]_{i,j=1}^N \in \mathbb{R}^{N \times N}$  definisana tako da je  $l_{ii} = \sum_{j=1}^N a_{ij}$  i  $l_{ij} = -a_{ij}$  za  $i \neq j$ . Tada se  $\mathcal{L}$  naziva matricom Laplasijana grafa  $\mathcal{G}$ . Lako se zaključuje da je  $-\mathcal{L}$  Metzlerova matrica kod koje je suma elemenata svake vrste jednaka nuli.

Na slici 1.3 prikazana su četiri grafa. Graf  $\mathcal{G}_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{E}_1)$  je definisan pomoću skupova  $\mathcal{V}_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $\mathcal{E}_1 = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 2), (4, 5), (5, 3)\}$ ,  $\mathcal{N}_1 = \emptyset$ ,  $\mathcal{N}_2 = \{1, 4\}$ ,  $\mathcal{N}_3 = \{2, 5\}$ ,  $\mathcal{N}_4 = \{2, 3\}$  i  $\mathcal{N}_5 = \{4\}$ . Može se uočiti da graf  $\mathcal{G}_1$  sadrži usmjerenu putanju  $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$ , što znači da postoji putanja od čvora  $i = 1$  do ostalih čvorova  $j = 2, \dots, 5$  na grafu. Sve grane grafa  $\mathcal{G}_2$  su neusmjerene, pa je samim tim  $\mathcal{G}_2$  neusmjeren graf. Na osnovu definicije je lako uvidjeti da je  $\mathcal{G}_3$  kompletan graf i da je  $\mathcal{G}_4$  stablo. Takođe, može se zaključiti da je  $\mathcal{G}_4$  podgraf grafa  $\mathcal{G}_1$  i da važi  $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_4$ , pa samim tim, graf  $\mathcal{G}_1$  sadrži razapinjuće stablo. Ako se usvoji da za sve težinske koeficijente grana važi  $a_{ij} = 1$ ,  $(j, i) \in \mathcal{E}_1$ , za graf  $\mathcal{G}_1$  se dobijaju težinska matrica susjedstva i odgovarajuća matrica Laplasijana:

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{L}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

## 1.2.2 Distribuirana šema upravljanja

Razmatra se MAS bez lidera koji se sastoji od  $N$  agenata čiji je model dat relacijom (1.4). Topologija mreže je opisana grafom  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , gdje je  $\mathcal{V} = \{1, \dots, N\}$  skup čvorova, pri čemu čvor  $i$  odgovara  $i$ -tom agentu u mreži. Skup  $\mathcal{E}$  sadrži granu  $(j, i) \in \mathcal{E}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, N$ ,  $i \neq j$ , ako i samo ako je  $i$ -tom agentu dostupna informacija o stanju kontrolera  $z_j$  ili izmjenom izlazu  $y_{mj}$   $j$ -tog agenta. Upravljački zakon koji zadovoljava ograničenja definisana grafom  $\mathcal{G}$  naziva se distribuirani upravljački zakon i matematički se opisuje na sljedeći način

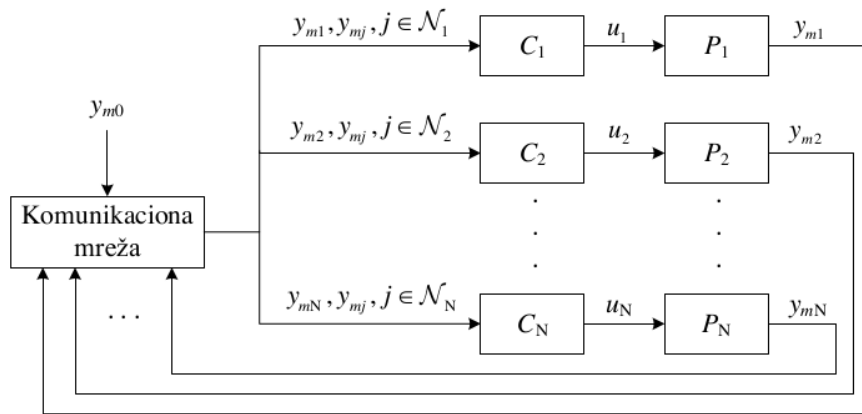
$$\begin{aligned} u_i &= k_i(z_i, z_j, y_{mi}, y_{mj}, j \in \mathcal{N}_i) \\ \dot{z}_i &= g_i(z_i, z_j, y_{mi}, y_{mj}, j \in \mathcal{N}_i), \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.17)$$

gdje je  $\mathcal{N}_i$  skup susjeda čvora  $i$  na grafu  $\mathcal{G}$ , dok su  $k_i$  i  $g_i$  globalno definisane glatke funkcije koje je potrebno dizajnirati. Može se uočiti da  $u_i$  zavisi od  $z_j$  i  $y_{mj}$ ,  $j \neq i$ , ako i samo ako je čvor  $j$  susjed čvora  $i$ . Samim tim, upravljački zakon (1.17) zadovoljava komunikaciona ograničenja uslovljena skupom susjeda  $\mathcal{N}_i$ , što čini ovaj upravljački zakon distribuiranim. Ovakav upravljački zakon vodi do distribuirane šeme upravljanja ilustrovane na slici 1.4, pri čemu je u multiagentnim sistemima bez lidera signal  $y_{m0}$  jednak nuli.

S druge strane, za MAS sa liderom koji je opisan jednačinama (1.3) i (1.4) moguće je definisati graf  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  sa skupom čvorova  $\mathcal{V} = \{0, 1, \dots, N\}$ , gdje čvor 0 korespondira lideru (1.3), dok čvorovi  $i = 1, \dots, N$  predstavljaju pratioce (1.4). Sa  $\mathcal{E}$  je označen skup grana, pri čemu je  $(j, i) \in \mathcal{E}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, N$ ,  $i \neq j$ , ako i samo ako je  $i$ -tom agentu dostupna informacija o stanju kontrolera  $z_j$  ili izmjenom izlazu  $y_{mj}$   $j$ -tog agenta. S obzirom da je lider modelovan kao autonomni sistem, tj. sistem bez ulaza, graf  $\mathcal{G}$  ne sadrži grane oblika  $(j, 0)$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Distribuirani upravljački zakon za MAS sa liderom (1.3)-(1.4) se definiše na sljedeći način

$$\begin{aligned} u_i &= k_i(z_i, z_j, y_{mi}, y_{mj}, j \in \mathcal{N}_i) \\ \dot{z}_i &= g_i(z_i, z_j, y_{mi}, y_{mj}, j \in \mathcal{N}_i), \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.18)$$

gdje je  $\mathcal{N}_i$  skup susjeda čvora  $i$  na grafu  $\mathcal{G}$ ,  $k_i$  i  $g_i$  su globalno definisane glatke funkcije koje je potrebno dizajnirati, dok  $z_0$  sadrži neku internu informaciju o lideru, kao što su na primjer parametri egzosistema. Iz relacije (1.18) se može uočiti da upravljački signal  $u_i$  zavisi od  $z_j$  i  $y_{mj}$ ,  $j \neq i$ , ako i samo ako je čvor  $j$  susjed čvora  $i$ . Samim tim, upravljački zakon (1.18) je distribuirane prirode zato što zadovoljava komunikaciona ograničenja uslovljena skupom susjeda  $\mathcal{N}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Šema upravljanja koja odgovara distribuiranom upravljačkom



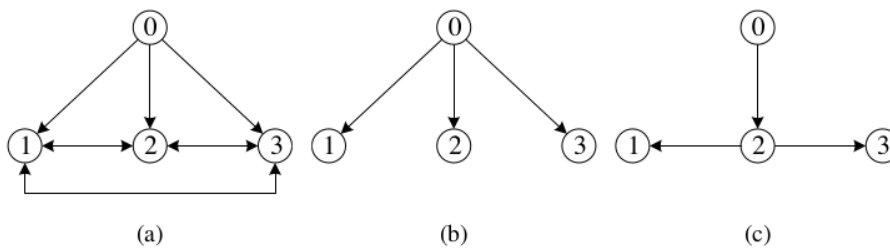
Slika 1.4: Distribuirana šema upravljanja.

zakonu (1.18) prikazana je na slici 1.4.

**Primjedba 1.2.** Upravljački zakon (1.17) za MAS bez lidera predstavlja specijalan slučaj upravljačkog zakona (1.18) za MAS sa liderom, koji se dobija za  $z_0 = 0$  i  $y_{m0} = 0$ .

**Primjedba 1.3.** Ako je dimenzija vektora  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , jednaka nuli, tada su upravljački zakoni (1.17) i (1.18) statički. Ako je  $y_{mj} = x_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , upravljački zakoni (1.17) i (1.18) se nazivaju upravljačkim zakonima sa spregom po stanjima.

Važno je primijetiti da je centralizovani upravljački zakon (1.15) specijalan slučaj distribuiranog upravljačkog zakona (1.18) u slučaju kada je graf kompletan. Decentralizovani upravljački zakon (1.16) je takođe specijalan slučaj distribuiranog upravljačkog zakona u slučaju kada je  $\mathcal{N}_i \equiv \{0\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Slika 1.5 ilustruje komunikacionu topologiju multiagentnog sistema koja korespondira trima definisanim šemama upravljanja - centralizovanoj, decentralizovanoj i distribuiranoj.



Slika 1.5: (a) Centralizovano upravljanje, (b) Decentralizovano upravljanje, (c) Distribuirano upravljanje.

### 1.3 Kooperativno upravljanje

Cilj kooperativnog upravljanja multiagentnim sistemima je ispunjenje nekog globalnog zadatka koristeći distribuirano prikupljanje informacija, komunikaciju i računanje. U literaturi je definisan veliki broj problema kooperativne prirode, a neki od najčešće razmatranih su konsenzus, upravljanje formacijom, kooperativna regulacija izlaza (eng. *cooperative output regulation*, COR) i *containment control* (CC) [3, 13]. U ovom poglavlju će kratko biti opisani pomenuti problemi, pri čemu će u narednim glavama detaljna pažnja biti posvećena kooperativnoj regulaciji izlaza i *containment control* problemu, budući da su tema ove disertacije. Stoga, za svakog agenta iz relacije (1.4) je najprije potrebno definisati upravljeni izlaz:

$$y_i = h_{pi}(x_i, u_i, \zeta_0, w), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.19)$$

gdje je  $y_i \in \mathbb{R}^p$ , dok je  $h_{pi}$  neka globalno definisana glatka funkcija koja zadovoljava uslov  $h_{pi}(0, 0, 0, w) = 0$ , za svako  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ . Upravljeni izlaz sistema  $y_i$  je najčešće neka poznata funkcija izmjenjenog izlaza  $y_{mi}$  i predstavlja one veličine  $i$ -tog podsistema koje odgovarajućim upravljanjem treba dovesti na željenu vrijednost.

Takođe, potrebno je definisati referentni izlaz lidera:

$$y_0 = h_0(\zeta_0), \quad (1.20)$$

gdje je  $y_0 \in \mathbb{R}^p$ , dok je  $h_0$  neka globalno definisana glatka funkcija čija je vrijednost nula u koordinatnom početku. Referentni izlaz  $y_0$  najčešće predstavlja referentnu (željenu) vrijednost upravljanog izlaza  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Konačno, regulisani izlaz  $e_i \in \mathbb{R}^p$ ,  $i = 1, \dots, N$ , za MAS sa liderom (1.3)-(1.4) se definiše na sljedeći način

$$e_i = h_i(x_i, u_i, \zeta_0, w), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.21)$$

gdje je  $h_i$  globalno definisana glatka funkcija koja zadovoljava uslov  $h_i(0, 0, 0, w) = 0$ , za svako  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ . Regulisani izlaz predstavlja promjenljivu čiju vrijednost treba svesti na nulu. U literaturi se najčešće usvaja izraz

$$e_i = y_i - y_0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.22)$$

Regulisani izlaz  $e_i$  u ovom slučaju predstavlja grešku u praćenju referentnog izlaza lidera, i obično se naziva signalom greške. Ipak, treba napomenuti da u opštem slučaju regulisani

izlaz može imati i drugi oblik. U specijalnom slučaju kada je  $h_0$  linearna funkcija, referentni izlaz lidera (1.20) se svodi na sljedeću linearnu formu

$$y_0 = R_0 \zeta_0, \quad (1.23)$$

gdje je  $R_0$  matrica odgovarajućih dimenzija. Ako su  $h_{pi}$ ,  $\forall i = 1, \dots, N$ , takođe linearne funkcije, regulisani izlaz (1.21) se može zapisati u sljedećoj linearnoj formi

$$e_i = C_i(w)x_i + D_i(w)u_i + R_i(w)\zeta_0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.24)$$

gdje su  $C_i(w)$ ,  $D_i(w)$  i  $R_i(w)$  matrice odgovarajućih dimenzija.

U nastavku će ukratko biti opisani neki standardni problemi kooperativnog upravljanja multiagentnim sistemima.

- **Konsenzus u multiagentnim sistemima bez lidera** [3, 14–18]: U multiagentnom sistemu bez lidera (1.4) kažemo da je postignut konsenzus uz pomoć distribuiranog upravljačkog zakona oblika (1.17) ukoliko za proizvoljne početne uslove upravljani izlaz  $y_i$  spregnutog sistema zadovoljava uslov

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_i(t) - y_j(t)) = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, N. \quad (1.25)$$

Ovaj problem je u literaturi poznat i pod nazivom problem sinhronizacije izlaza. U specijalnom slučaju kada je  $y_i = x_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , sinhronizacija izlaza se svodi na sinhronizaciju stanja sistema.

- **Konsenzus u multiagentnim sistemima sa liderom** [3–5, 7, 8, 19–21]: U multiagentnim sistemima bez lidera, postizanje konsenzusa podrazumijeva sinhronizaciju izlaznih trajektorija agenata. Međutim, iako u ovom slučaju sve trajektorije konvergiraju ka istoj veličini (čija vrijednost zavisi od početnih uslova individualnih podsistema), ne postoji mogućnost zadavanja referentne trajektorije. S druge strane, u multiagentnim sistemima sa liderom se zahtijeva da trajektorije pratilaca asimptotski konvergiraju ka referentnom izlazu lidera. U skladu sa tim, relacija (1.25) koja opisuje problem konsenzusa se može modifikovati na sljedeći način

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_i(t) - y_0(t)) = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.26)$$

Očigledno je da ispunjenje uslova (1.26) povlači sa sobom i ispunjenje uslova (1.25), tj.

konzensus u multiagentnom sistemu bez lidera predstavlja specijalan slučaj konsenzusa u multiagentnom sistemu sa liderom. U slučaju kada je  $y_i = x_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , ukoliko je zadovoljen uslov (1.26) kaže se da je u multiagentnom sistemu postignut konsenzus stanja.

- **Kooperativna regulacija izlaza sistema (COR)** [1, 3, 22–27]: Problem konsenzusa u literaturi je najprije analiziran i riješen za homogene linearne multiagentne sisteme oblika (1.11). Pokazano je da je u multiagentnim sistemima, uz određene standardne pretpostavke, moguće postići konsenzus korišćenjem distribuiranog statičkog upravljačkog zakona sa spregom po stanjima. U opštem slučaju, kada su agenti opisani modelom (1.4), što obuhvata situacije kada su agenti heterogeni, nemaju egzaktne poznate parametre i/ili su izloženi eksternim poremećajima, globalni (kolektivni) ciljevi mogu biti značajno sofisticiraniji. Rješavanje COR problema podrazumijeva dizajn upravljačkog zakona oblika (1.18) na takav način da za bilo koje početno stanje sistema trajektorije pratilaca zadovoljavaju uslov

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.27)$$

gdje je  $e_i$  opšti oblik regulisanog izlaza definisan jednačinom (1.21). U specijalnom slučaju kada regulisani izlaz ima oblik (1.22), rješavanjem COR problema istovremeno se rješava i problem konsenzusa u multiagentnim sistemima.

- **Containment control (CC)** [2, 13, 28–32]: CC problem predstavlja prirodnu ekstenziju COR problema na multiagentne sisteme koji sadrže više od jednog lidera. Kod ovakvih multiagentnih sistema, koji se sastoje od  $N + M$  agenata ( $N$  - broj pratilaca,  $M$  - broj lidera), obično se zahtijeva da trajektorije pratilaca konvergiraju ka trajektorijama koje se nalaze unutar vremenski-promjenljivog konveksnog omotača definisanog od strane lidera. COR problem zapravo predstavlja specijalan slučaj CC problema u slučaju kada je  $M = 1$ . Za definiciju CC problema potrebno je uvesti pojam rastojanja nekog vektora  $x \in \mathbb{R}^n$  od konveksnog skupa  $C \in \mathbb{R}^n$  u vidu Euklidove norme  $\text{dist}(x, C) = \inf_{y \in C} \|x - y\|_2$ . U multiagentnom sistemu koji se sastoji od  $N$  pratilaca i  $M$  lidera kažemo da je postignut *containment* pomoću distribuiranog upravljačkog zakona oblika (1.18), ako za bilo koje početne uslove trajektorije agenata zadovoljavaju uslov

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(y_i(t), \text{Co}(y_k(t), k \in \{N+1, N+2, \dots, N+M\})) = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, N\},$$

gdje je  $\text{Co}(y_k(t), k \in \{N+1, N+2, \dots, N+M\})$  konveksni omotač skupa  $\{y_k(t), k \in$

$\{N + 1, N + 2, \dots, N + M\}$ .

- **Kooperativno praćenje trajektorija u multiagentnim sistemima** [33–38]: Za razliku od COR i CC problema gdje su lideri autonomni egzosistemi čija je uloga da generišu referentni signal/konveksni omotač, kod problema kooperativnog praćenja trajektorija lideri nisu autonomni, već se njima direktno upravlja na osnovu informacija dobijenih od susjednih agenata (drugih lidera i/ili pratilaca) u mreži. Na osnovu ovih informacija i poznavanja referentnih trajektorija, uloga lidera je da generišu upravljački signal koji se injektira u mrežu pratilaca na takav način da svaki pratilac asimptotski prati različitu referentnu trajektoriju, tj. treba da važi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_F - y_S) = 0,$$

gdje je  $y_F$  vektor združenih izlaza pratilaca, dok je  $y_S$  vektor referentnih trajektorija. S druge strane, pratioci izvršavaju jednostavne upravljačke zakone zasnovane na relativnim mjerenjima u odnosu na susjede. Mana ovog pristupa je što često zahtijeva poznavanje kompletne topologije grafa, tj. matrice Laplasijana grafa.

- **Upravljanje formacijom** [3, 39–43]: Upravljanje formacijom u multiagentnom sistemu podrazumijeva dizajn distribuiranog upravljačkog zakona kojim se obezbjeđuje da agenti koji se kreću po željenim trajektorijama u prostoru, formiraju i održavaju određenu geometrijsku konfiguraciju, poput kruga ili poligona. Na primjer, u dvodimenzionalnom prostoru za zadato  $N > 0$ , željena formacija se specificira pomoću referentne trajektorije  $h_0(t) \in \mathbb{R}^2$  i  $N$  vektora  $h_{di} \in \mathbb{R}^2$ ,  $i = 1, \dots, N$ , koji predstavljaju željena relativna odstupanja  $i$ -tog agenta od referentne trajektorije. Stoga, veličina

$$\bar{h}_{di} \triangleq h_{di} + h_0, \quad i = 1, \dots, N,$$

predstavlja referentnu trajektoriju  $i$ -tog agenta. Neka vektor  $h_i(t)$  označava poziciju  $i$ -tog agenta. Problem upravljanja formacijom se smatra riješenim ukoliko trajektorije agenata zadovoljavaju sljedeće uslove

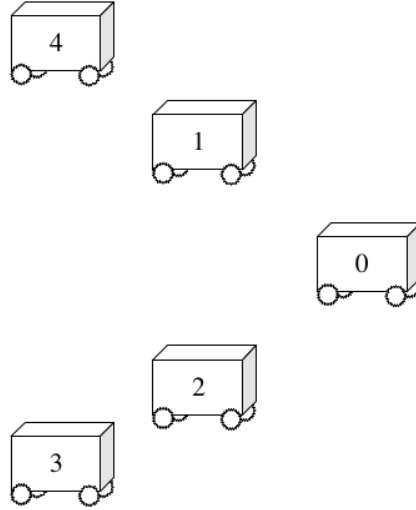
$$\lim_{t \rightarrow \infty} (h_i(t) - \bar{h}_{di}(t)) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{h}_i(t) - \dot{\bar{h}}_{di}(t)) = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Na slici 1.6 prikazana je formacija koja se sastoji od četiri pratioca i jednog lidera. U nastavku će biti pokazano da se pod određenim uslovima problem upravljanja formacijom



može preformulisati u problem kooperativne regulacije izlaza.



Slika 1.6: Primjer formacije multiagentnog sistema sa liderom. Lider je označen indeksom 0, dok su vozila 1 – 4 pratioci.

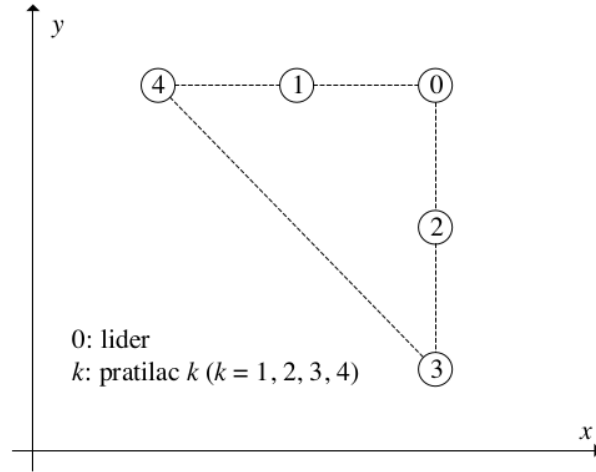
**Primjer 1.1.** Razmatra se problem upravljanja formacijom u multiagentnom sistemu koji se sastoji od pet mobilnih robota, kao što je prikazano na slici 1.6. Cilj je dizajnirati distribuirani kontroler na takav način da pratioci (agenti 1 – 4) zajedno sa liderom (agent 0) formiraju konfiguraciju prikazanu na slici 1.7, pri čemu se lider kreće konstantnom brzinom po pravoj liniji. Radi jednostavnosti, smatraće se da je dinamika mobilnih robota opisana dvostrukim integritetom

$$\ddot{h}_i = \bar{u}_i, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (1.28)$$

gdje veličine  $h_i(t)$ ,  $\bar{u}_i(t) \in \mathbb{R}^2$  predstavljaju poziciju i upravljački signal  $i$ -tog mobilnog robota, respektivno. Uvođenjem oznaka  $h_i = \text{col}(x_{hi}, y_{hi})$ ,  $\dot{h}_i = \text{col}(\dot{x}_{hi}, \dot{y}_{hi})$  i  $\bar{u}_i = \text{col}(\bar{u}_{xi}, \bar{u}_{yi})$ , model (1.28) je moguće zapisati u prostoru stanja

$$\begin{aligned} \dot{x}_{hi} &= p_{xi} \\ \dot{y}_{hi} &= p_{yi} \\ \dot{p}_{xi} &= \bar{u}_{xi} \\ \dot{p}_{yi} &= \bar{u}_{yi}, \quad i = 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Razmatrani problem se može svesti na problem kooperativne regulacije izlaza na sljedeći način. Neka je trajektorija lidera zadata jednačinom  $h_0(t) = p_0 t + h_{d0}$ , gdje su  $h_{d0} = \text{col}(x_{d0}, y_{d0})$  i  $p_0 = \text{col}(p_x^d, p_y^d)$  konstantni vektori. Lako se može pokazati da se trajektorija



Slika 1.7: Željena formacija multiagentnog sistema sa liderom.

lidera može modelovati kao izlaz iz sljedećeg egzosistema

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_0 &= S_0 \zeta_0 = \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes I_2 \right) \zeta_0 \\ y_0 &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes I_2 \right) \zeta_0,\end{aligned}\tag{1.30}$$

gdje je  $y_0(t) = h_0(t)$  ako se za početno stanje egzosistema usvoji  $\zeta_0(0) = \text{col}(x_{d0}, y_{d0}, p_x^d, p_y^d)$ .

Ako se uvedu oznake  $h_{di} = \text{col}(x_{di}, y_{di})$ ,  $x_i = \text{col}(x_{hi} - x_{di}, y_{hi} - y_{di}, p_{xi}, p_{yi})$  i definiše signal greške

$$e_i(t) = h_i(t) - (h_{di} + h_0(t)), \quad i = 1, \dots, 4,\tag{1.31}$$

tada se dinamika pratilaca (1.29) i signal greške (1.31) mogu zapisati u obliku (1.9) i (1.24), respektivno. Naime, ako se usvoji da je  $\bar{u}_i$  ulaz sistema, a da su izmjereni i upravljani izlaz  $y_{mi} = x_i$  i  $y_i = h_i - h_{di}$ , tada se dobijaju sljedeće matrice

$$\begin{aligned}A_i &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes I_2, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E_i = 0_{4 \times 4}, \\ C_{mi} &= I_4, \quad D_{mi} = 0_{4 \times 2}, \quad F_{mi} = 0_{4 \times 4}, \\ C_i &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes I_2, \quad D_i = 0_{2 \times 2}, \quad R_i = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \otimes I_2.\end{aligned}$$

Lako se može pokazati da ukoliko važi  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0$ , tada će važiti  $\lim_{t \rightarrow \infty} (h_i(t) - h_0(t)) = h_{di}$  i  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{h}_i(t) = p_0$ . Samim tim, rješavanjem problema kooperativne regulacije izlaza za

MAS (1.29)-(1.31), pri čemu važi  $y_{mi} = x_i$ , postiže se da mobilni roboti asimptotski konvergiraju ka formaciji prikazanoj na slici 1.7. Postupak za rješavanje ovog problema je zasnovan na konstrukciji distribuiranog opservera i biće detaljno prezentovan u Poglavlju 2.2.

## 1.4 Distribuirani opserver stanja

Često korišćeni sistemski pristup sintezi distribuiranih upravljačkih zakona za rješavanje različitih problema kooperativnog upravljanja u kompleksnim multiagentnim sistemima se zasniva na distribuiranom opserveru. Distribuirani opserver predstavlja distribuirani dinamički kompenzator koji pratiocima omogućava estimaciju referentnog signala lidera putem razmjene informacija kroz komunikacionu mrežu. U ovom poglavlju će biti prezentovan opšti okvir za sintezu i dizajn distribuiranih upravljačkih zakona zasnovanih na distribuiranom opserveru.

### 1.4.1 Sinteza distribuiranih upravljačkih zakona

Posmatrajmo multiagentni sistem koji se sastoji od  $N$  pratilaca i jednog lidera. Dinamika lidera je opisana modelom u prostoru stanja (1.3), koji ovdje ponavljamo radi bolje preglednosti rada

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_0 &= f_0(\zeta_0, w_0) \\ y_{m0} &= h_{m0}(\zeta_0, w_0).\end{aligned}\tag{1.32}$$

Vektori  $\zeta_0 \in \mathbb{R}^q$  i  $y_{m0} \in \mathbb{R}^{p_{m0}}$  označavaju stanje i izmjereni izlaz lidera, respektivno, dok je  $w_0 \in \mathbb{R}^{n_{w0}}$  nepoznati konstantni vektor.

Dinamika  $i$ -tog pratioca, za  $i = 1, \dots, N$ , opisana je jednačinama

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= f_i(x_i, u_i, \zeta_0, w) \\ e_i &= h_i(x_i, u_i, \zeta_0, w) \\ y_{mi} &= h_{mi}(x_i, u_i, \zeta_0, w),\end{aligned}\tag{1.33}$$

gdje su  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ ,  $e_i \in \mathbb{R}^{p_i}$  i  $y_{mi} \in \mathbb{R}^{p_{mi}}$  stanje, upravljački signal, regulisani izlaz i izmjereni izlaz sistema, respektivno, dok je  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  nepoznati vektor.

Lider i pratioci zajedno čine MAS koji se sastoji od  $N + 1$  agenata, čija je komunikaciona topologija opisana grafom  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , gdje su  $\mathcal{V} = \{0, 1, \dots, N\}$  i  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  skup čvorova i skup grana, respektivno. Lideru (1.32) odgovara čvor 0, dok čvor  $i$  korespondira  $i$ -tom pratiocu (1.33), za  $i = 1, \dots, N$ . Sa  $\mathcal{A} = [a_{ij}]_{i,j=0}^N$  će biti označena težinska matrica susjedstva

grafa  $\mathcal{G}$ . Neka je  $\bar{\mathcal{G}} = (\bar{\mathcal{V}}, \bar{\mathcal{E}})$  podgraf grafa  $\mathcal{G}$ , definisan pomoću skupova  $\bar{\mathcal{V}} = \{1, \dots, N\}$  i  $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \cap (\mathcal{V} \times \mathcal{V})$ . Sa  $\bar{\mathcal{L}}$  ćemo označiti matricu Laplasijana grafa  $\bar{\mathcal{G}}$ , dok matricu  $H$  definišemo na sljedeći način  $H = \bar{\mathcal{L}} + \text{diag}(a_{10}, \dots, a_{N0})$ .

Kao što je pomenuto u Potpoglavlju 1.2.2, distribuirani dinamički upravljački zakon ima opšti oblik

$$\begin{aligned} u_i &= k_i(\xi_i, \xi_j, y_{mi}, y_{mj}, j \in \mathcal{N}_i) \\ \dot{\xi}_i &= \psi_i(\xi_i, \xi_j, y_{mi}, y_{mj}, j \in \mathcal{N}_i), \end{aligned} \quad (1.34)$$

gdje su  $k_i$  i  $\psi_i$  neke globalno definisane glatke funkcije koje je potrebno dizajnirati. Može se uočiti da upravljački zakon  $u_i$  zavisi od veličina  $\xi_j$  i  $y_{mj}$ , ako i samo ako je čvor  $j$  susjed čvora  $i$ . Samim tim, upravljački zakon (1.34) zadovoljava komunikaciona ograničenja definisana skupom susjeda  $\mathcal{N}_i$ .

U nastavku će biti razmotren sljedeći problem kooperativnog upravljanja:

**Problem 1.** Za multiagentni sistem zadat jednačinama (1.32)-(1.33) i komunikacioni graf  $\mathcal{G}$ , dizajnirati distribuirani upravljački signal oblika (1.34) na takav način da spregnuti sistem bude stabilan za bilo koje početne uslove i da njegove trajektorije zadovoljavaju sljedeći uslov:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

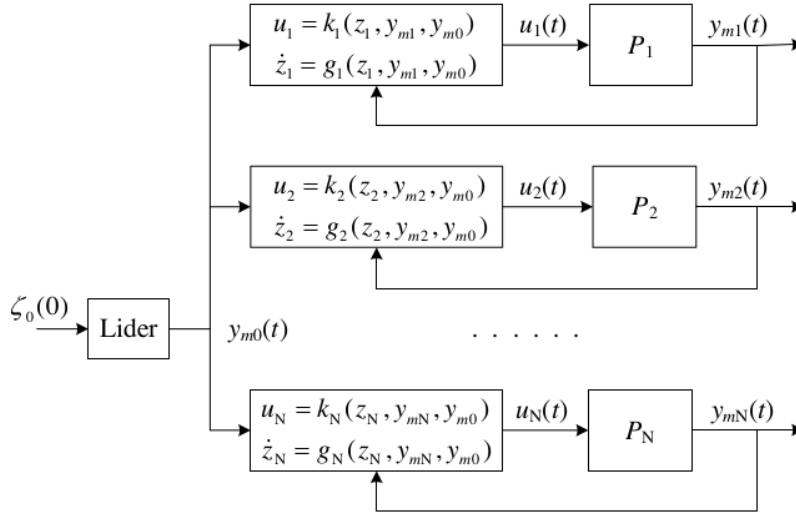
U slučaju kada je  $N = 1$ , Problem 1 se svodi na klasičan problem regulacije izlaza u linearnim sistemima, koji će detaljnije biti opisan u Poglavlju 2.1. Najčešće je ovaj problem moguće riješiti upravljačkim zakonom oblika

$$\begin{aligned} u_1 &= k_1(z_1, y_{m1}, y_{m0}) \\ \dot{z}_1 &= g_1(z_1, y_{m1}, y_{m0}). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Kada je  $N > 1$  i  $\mathcal{N}_i = \{0\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , tj. kada je lider jedini susjed svakog pratioca u mreži, tada svaki pratilac direktno dobija informaciju o lideru. U ovom slučaju, dizajniranjem upravljačkog zakona oblika (1.35) za svaki podsistem (1.33), dobija se decentralizovani upravljački zakon

$$\begin{aligned} u_i &= k_i(z_i, y_{mi}, y_{m0}) \\ \dot{z}_i &= g_i(z_i, y_{mi}, y_{m0}), \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Šema upravljanja multiagentnim sistemom pomoću decentralizovanog upravljačkog zakona je ilustrovana na slici 1.8. U praksi, informacija o vrijednosti signala  $y_{m0}$  nije dostupna svim



Slika 1.8: Decentralizovana šema upravljanja.

pratiocima zbog ograničenja u komunikaciji koja su definisana grafom  $\mathcal{G}$ . Kako bi se ova ograničenja prevazišla, potrebno je vršiti razmjenu informacija među susjednim agentima, što dovodi do distribuiranog upravljačkog zakona oblika (1.34). Za kompleksne sisteme je dizajniranje distribuiranog upravljačkog zakona (1.34) znatno izazovnije nego dizajniranje decentralizovanog upravljačkog zakona (1.36). U nastavku će biti prezentovan okvir za sintezu distribuiranog upravljačkog zakona (1.34), koji je inspirisan decentralizovanim upravljačkim zakonom (1.36) i distribuiranim opserversom.

Radi jednostavnosti smatraćemo da je model lidera linearan:

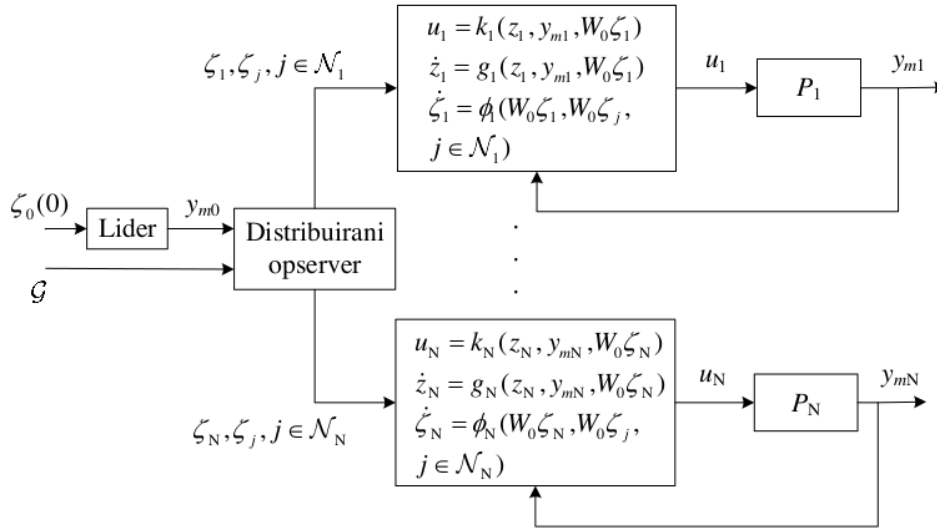
$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_0 &= S_0 \zeta_0 \\ y_{m0} &= W_0 \zeta_0,\end{aligned}\tag{1.37}$$

gdje su  $S_0 \in \mathbb{R}^{q \times q}$  i  $W_0 \in \mathbb{R}^{p_{m0} \times q}$  poznate matrice.

Za zadati komunikacioni graf  $\mathcal{G}$ , razmotrimo distribuirani dinamički kompenzator oblika

$$\dot{\zeta}_i = \phi_i(W_0 \zeta_i, W_0 \zeta_j, j \in \mathcal{N}_i), \quad i = 1, \dots, N.\tag{1.38}$$

Ako za proizvoljne početne uslove stanja kompenzatora zadovoljavaju uslove  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\zeta_i(t) - \zeta_0(t)) = 0$ , za  $i = 1, \dots, N$ , onda se kompenzator (1.38) naziva distribuiranim opserversom stanja egzosistema (1.37). Treba napomenuti da je ulazni signal opserversa (1.38) izmjereni izlaz lidera  $y_{m0}$ , budući da je  $W_0 \zeta_0 = y_{m0}$ .



Slika 1.9: Šema upravljanja zasnovana na distribuiranom opserveru.

Kombinovanjem decentralizovanog upravljačkog zakona (1.36) i distribuiranog opservera (1.38) dobija se upravljački zakon

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{4} \quad u_i = k_i(z_i, y_{mi}, W_0 \zeta_i) \\
 & \dot{z}_i = g_i(z_i, y_{mi}, W_0 \zeta_i) \\
 & \dot{\zeta}_i = \phi_i(W_0 \zeta_i, W_0 \zeta_j, j \in \mathcal{N}_i),
 \end{aligned} \tag{1.39}$$

koji se naziva distribuiranim upravljačkim zakonom zasnovanim na opserveru. Šema upravljanja pomoću kontrolera (1.39) je prikazana na slici 1.9. Ako se uvedu oznake  $\xi_i = \text{col}(z_i, \zeta_i)$  i  $\psi_i = \text{col}(g_i, \phi_i)$ , može se uočiti da distribuirani upravljački zakon (1.39) predstavlja specijalni slučaj zakona (1.34).

Nekoliko pitanja vezanih za sintezu distribuiranog upravljačkog zakona (1.39) se prirodno nameću. Najprije se može postaviti pitanje da li uvijek postoji distribuirani opserver stanja za egzosistem (1.37) koji zadovoljava komunikaciona ograničenja definisana grafom  $\mathcal{G}$ . Dalje, ako takav opserver postoji i ako je poznato da decentralizovani upravljački zakon (1.36) rješava Problem 1, postavlja se pitanje da li će zakon (1.39) koji predstavlja kompoziciju zakona (1.36) i opservera (1.38) takođe riješiti Problem 1? Ukoliko rješivost Problema 1 decentralizovanim upravljačkim zakonom (1.36) implicira rješivost istog problema distribuiranim upravljačkim zakonom (1.39), onda se kaže da upravljački zakon (1.39) zadovoljava takozvani CE princip (eng. *certainty equivalence principle*) [3].

U narednom potpoglavlju će biti prezentovan jedan pristup sintezi distribuiranog opservera, dok će više riječi o dizajnu kontrolera oblika (1.39) i CE principu biti u narednoj glavi. Treba napomenuti, da bi sinteza distribuiranog opservera bila moguća, potrebno je da važe neke pretpostavke koje se odnose na model lidera (1.37) i strukturu komunikacionog grafa  $\mathcal{G}$ . U vezi sa tim, u nastavku su date najblaže pretpostavke koje treba da budu zadovoljene.

**Pretpostavka 1.1.** Graf  $\mathcal{G}$  sadrži razapinjuće stablo sa korijenom u čvoru 0.

Pretpostavke za dinamiku lidera (1.37) su date u nastavku.

**Pretpostavka 1.2.** Par  $(W_0, S_0)$  je detektabilan.

**Pretpostavka 1.3.** Matrica  $S_0$  nema sopstvenih vrijednosti sa pozitivnim realnim dijelom.

**Primjedba 1.4.** Distribuirani opserver (1.38) se svodi na klasični Luenbergerov opserver u slučaju kada je  $N = 1$ . Stoga, Pretpostavka 1.2 je potreban uslov za sintezu distribuiranog opservera stanja lidera. Pretpostavka 1.3 predstavlja uslov koji se odnosi na lokaciju sopstvenih vrijednosti matrice  $S_0$  i biće korišćena u nastavku.

## 1.4.2 Distribuirani opserver stanja egzosistema

Radi jednostavnosti, u literaturi se obično usvaja pretpostavka da je svakom pratiocu poznat model lidera, tj. da su dostupne matrice  $S_0$  i  $W_0$ . U tom slučaju, distribuirani opserver se najčešće formuliše na sljedeći način [3, 22, 23]:

$$\dot{\zeta}_i = S_0 \zeta_i + L_0 \sum_{j=0}^N a_{ij} W_0 (\zeta_j - \zeta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.40)$$

gdje je  $\zeta_i \in \mathbb{R}^q$  stanje opservera, dok je  $L_0 \in \mathbb{R}^{q \times p_{m0}}$  konstantna matrica pojačanja koju je potrebno dizajnirati. U situacijama kada model lidera nije poznat svim pratiocima, koriste se adaptivne forme distribuiranog opservera [3, 5, 44, 45].

Ako se uvede smjena  $\tilde{\zeta}_i = \zeta_i - \zeta_0$ , gdje  $\tilde{\zeta}_i$  predstavlja grešku u estimaciji  $i$ -tog agenta, i definiše veličina  $\tilde{\zeta} = \text{col}(\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_N)$ , lako se može pokazati da se dinamika greške u estimaciji za sve agente može zapisati u matričnom obliku [3]:

$$\dot{\tilde{\zeta}} = (I_N \otimes S_0 - H \otimes (L_0 W_0)) \tilde{\zeta}. \quad (1.41)$$

Očigledno je da dinamički kompenzator (1.40) ima ulogu distribuiranog opservera stanja egzosistema ako i samo ako je ekvilibrijum sistema (1.41) asimptotski stabilan. Drugim

riječima, matricu  $L_0$  je potrebno dizajnirati na takav način da sistem (1.41) bude asimptotski stabilan. U nastavku je data teorema koja je ključna za dizajn parametara distribuiranog dinamičkog kompenzatora (1.40), čija se dinamika greške u estimaciji stanja egzosistema opisuje relacijom (1.41) [3].

**Teorema 1.1.** *Neka su za egzosistem (1.37) i komunikacioni graf  $\mathcal{G}$  ispunjene Pretpostavke 1.1 i 1.2 i neka je matrica  $P_0 > 0$  jedinstveno rješenje jednačine  $P_0 S_0^T + S_0 P_0 - P_0 W_0^T W_0 P_0 + I_q = 0$ . Tada, za proizvoljne početne uslove  $\zeta_i(0) \in \mathbb{R}^q$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , pojačanje opservera  $L_0 = \mu_\zeta P_0 W_0^T$  i skalar  $\mu_\zeta \geq \frac{1}{2} \underline{\lambda}_H^{-1}$ , stanja opservera (1.40) eksponencijalno konvergiraju ka stvarnim stanjima egzosistema, tj.*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\zeta}_i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

*Dokaz.* Dokaz se može pronaći u okviru Teoreme 4.3 u [3]. □

U slučaju kada je  $y_{m0} = \zeta_0$ , tj. kada je  $W_0 = I_q$ , ako usvojimo  $L_0 = \mu_\zeta I_q$ , distribuirani opserver (1.40) se redukuje na formu

$$\dot{\zeta}_i = S_0 \zeta_i + \mu_\zeta \sum_{j=0}^N a_{ij} (\zeta_j - \zeta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.42)$$

dok izraz za grešku u estimaciji stanja egzosistema (1.41) dobija sljedeći oblik

$$\dot{\tilde{\zeta}} = (I_N \otimes S_0 - \mu_\zeta (H \otimes I_q)) \tilde{\zeta}. \quad (1.43)$$

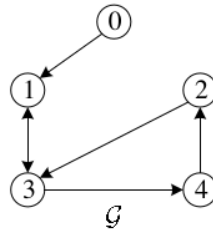
Teorema data u nastavku garantuje da greška opservera (1.43) asimptotski konvergira ka nuli za odgovarajući odabir parametra  $\mu_\zeta$ .

**Teorema 1.2.** *Neka je za egzosistem (1.37) i komunikacioni graf  $\mathcal{G}$  ispunjena Pretpostavka 1.1 i neka je  $W_0 = I_q$ . Tada, za proizvoljne početne uslove  $\zeta_i(0) \in \mathbb{R}^q$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , i skalar  $\mu_\zeta > \bar{\lambda}_{S_0} \underline{\lambda}_H^{-1}$ , stanja opservera (1.42) eksponencijalno konvergiraju ka stvarnim vrijednostima stanja lidera, tj.*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\zeta}_i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

*Dokaz.* Dokaz se može pronaći u okviru Teoreme 4.4 u [3]. □





Slika 1.10: Komunikacioni graf koji zadovoljava Pretpostavku 1.1.

### 1.4.3 Primjer dizajna distribuiranog opservera

Posmatrajmo multiagentni sistem koji se sastoji od četiri pratioca i lidera. Komunikaciona topologija je opisana grafom  $\mathcal{G}$  koji je ilustrovan na slici 1.10. Sa slike se može uočiti da graf zadovoljava Pretpostavku 1.1. Matrica Laplasijana ovog grafa je

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

odakle se lako dobija matrica

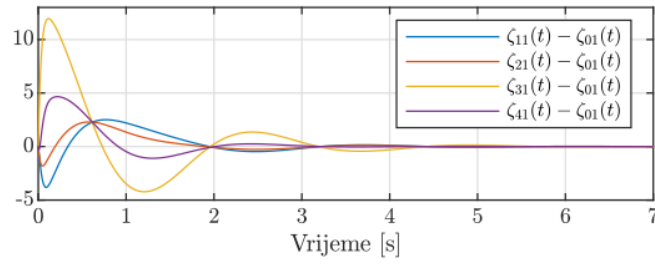
$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

čija je najmanja sopstvena vrijednost  $\lambda_H = 0.1332$ , odnosno  $\lambda_H^{-1} = 7.5053$ .

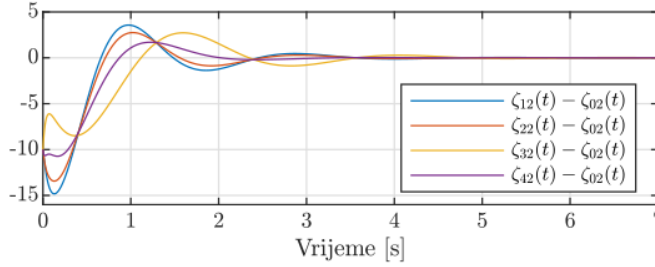
**Primjer.** U ovom primjeru ćemo razmatrati distribuirani opserver (1.40) na grafu  $\mathcal{G}$ . Lider je opisan sljedećim modelom

$$S_0 = \begin{bmatrix} 0.1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad W_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

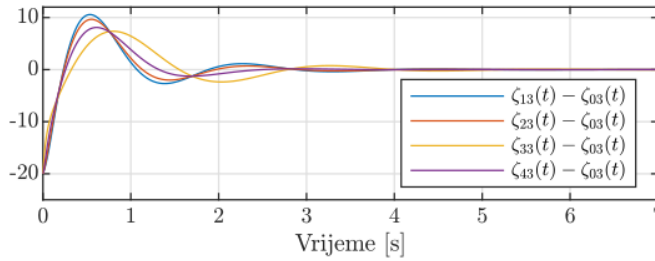
Lako se može provjeriti da za usvojeni model lidera važi Pretpostavka 1.2. Samim tim, na osnovu Teoreme 1.1 se može izvršiti sinteza distribuiranog opservera (1.40). Rješavanjem



(a) Greška u estimaciji prvog stanja egzosistema.



(b) Greška u estimaciji drugog stanja egzosistema.



(c) Greška u estimaciji trećeg stanja egzosistema.

Slika 1.11: Greška distribuiranog opserversa (1.40) u estimaciji stanja egzosistema.

Rikatijske jednačine

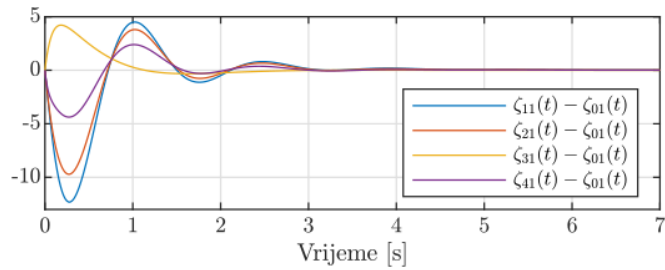
$$P_0 S_0^T + S_0 P_0 - P_0 W_0^T W_0 P_0 + I_q = 0,$$

dobija se matrica

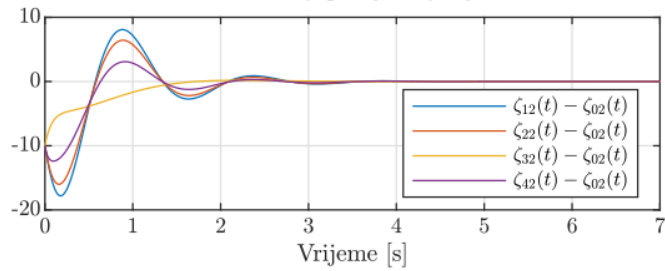
$$P_0 = \begin{bmatrix} 1.29 & 0.25 & 0.04 \\ 0.25 & 0.61 & -0.04 \\ 0.04 & -0.04 & 0.76 \end{bmatrix}.$$

Pojačanje opserversa se može izračunati iz relacije  $L_0 = \mu_\zeta P_0 W_0^T$  za vrijednost  $\mu_\zeta = 10$ , koja je veća od  $\frac{1}{2}\lambda_H^{-1} = 3.7526$ . Početni uslovi su:  $\zeta_0(0) = [0 \ 10 \ 20]^T$  i  $\zeta_i(0) = 0_{3 \times 1}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Sa slike 1.11 se može primijetiti da greška distribuiranog opserversa (1.40) u estimaciji stanja egzosistema asimptotski konvergira ka nuli.

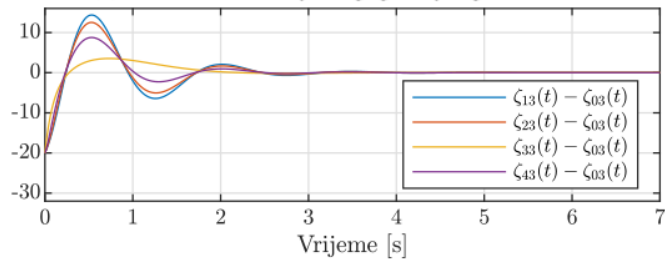
**Primjer.** U ovom primjeru ćemo razmatrati distribuirani opservers (1.42) na grafu  $\mathcal{G}$ . Model



(a) Greška u estimaciji prvog stanja egzosistema.



(b) Greška u estimaciji drugog stanja egzosistema.



(c) Greška u estimaciji trećeg stanja egzosistema.

Slika 1.12: Greška distribuiranog opserversa (1.42) u estimaciji stanja egzosistema.

lidera (1.37) je dat matricama

$$S_0 = \begin{bmatrix} 0.1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad W_0 = I_3.$$

Kako je  $\bar{\lambda}_{S_0} = 0.1$ , na osnovu Teoreme 1.2 možemo odabrati vrijednost  $\mu_\zeta = 5$ , koja je veća od  $\bar{\lambda}_{S_0} \lambda_H^{-1} = 0.75$ . Početni uslovi su:  $\zeta_0(0) = [0 \ 10 \ 20]^T$  i  $\zeta_i(0) = 0_{3 \times 1}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Sa slike 1.12 se može uočiti da i u ovom slučaju greška distribuiranog opserversa (1.42) u estimaciji stanja egzosistema asimptotski konvergira ka nuli.

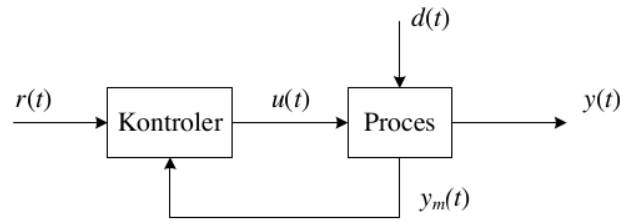
## Glava 2

# Kooperativna regulacija izlaza u linear-nim multiagentnim sistema

Kooperativna regulacija izlaza (eng. *cooperative output regulation*, COR) [3] predstavlja jedan od najčešće istraživanih problema kooperativnog upravljanja multiagentnim sistemima. Da bi riješili COR problem, potrebno je izvršiti sintezu distribuiranog upravljačkog zakona koji obezbjeđuje da izlazi agenata asimptotski prate određenu klasu referentnih signala u prisustvu eksternih poremećaja. Agenti čiji je zadatak praćenje željenog referentnog signala nazivaju se pratiocima. Sa druge strane, referentnu trajektoriju generiše autonomni egzogeni sistem (egzosistem) koji nazivamo liderom. COR zapravo predstavlja generalizaciju klasičnog problema regulacije izlaza (eng. *output regulation*, OR) na multiagentne sisteme. Iz tog razloga, u prvom poglavlju će najprije biti razmotren OR problem, pri čemu će poseban naglasak biti na sintezi upravljačkog zakona sa spregom po stanjima i upravljačkog zakona zasnovanog na opserveru. U drugom poglavlju biće formalno uveden COR problem, nakon čega će biti diskutovani potrebni uslovi za njegovu rješivost. Takođe će biti prezentovani i COR protokoli čija se sinteza zasniva generalizaciji metoda prethodno opisanih u OR dijelu.

### 2.1 Klasični problem regulacije izlaza linearnog sistema

U ovom poglavlju je analiziran problem regulacije izlaza za linearne sisteme čiji su parametri u potpunosti poznati. Prezentovan je opšti upravljački zakon sa spregom po mjerenom izlazu, nakon čega su diskutovani potrebni uslovi za rješavanje OR problema ovim upravljačkim zakonom. Posebna pažnja je posvećena analizi dva specijalna slučaja kontrolera u opštem obliku – upravljačkom zakonu sa spregom po stanjima i upravljačkom zakonu



Slika 2.1: Šema upravljanja sa povratnom spregom.

zasnovanom na opserversu.

### 2.1.1 Postavka problema

Na slici 2.1 prikazana je klasična šema upravljanja sa povratnom spregom, na kojoj  $y(t)$  predstavlja upravljani izlaz, dok je  $d(t)$  eksterni poremećaj koji djeluje na objekat upravljanja. Glavni zadatak je sinteza kontrolera (upravljačkog zakona) koji na osnovu izmjerene vrijednosti izlaza  $y_m(t)$  i referentnog signala  $r(t)$  obezbjeđuje unutrašnju stabilnost spregnutog sistema i asimptotsko praćenje signala  $r(t)$ , tj.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - r(t)) = 0. \quad (2.1)$$

Opisani zadatak upravljanja se u literaturi naziva problemom asimptotskog praćenja referentne trajektorije i potiskivanja poremećaja, ili češće samo problemom regulacije izlaza (eng. *output regulation*, OR) [46–49].

Za proces sa slike 2.1 ćemo smatrati da je linearan, tj. da se može opisati sljedećim jednačinama u prostoru stanja:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + E_d d \\ y &= Cx + Du + F_d d \\ y_m &= C_m x + D_m u + F_{d_m} d, \end{aligned} \quad (2.2)$$

gdje su  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$  i  $y_m \in \mathbb{R}^{p_m}$  stanje, ulazni signal, upravljani izlaz i izmjereni izlaz, dok  $d \in \mathbb{R}^{q_1}$  i  $r \in \mathbb{R}^{q_2}$  označavaju poremećaj i referentni signal.

U praksi, referentni signal i poremećaj nisu u potpunosti poznati signali. Na primjer, poremećaj sinusoidalnog oblika može imati proizvoljnu amplitudu i početnu fazu, ili čak frekvenciju, dok referentni signal poput step funkcije može imati nepoznatu amplitudu. Iz ovog razloga je poželjno dizajnirati kontroler koji može obezbijediti praćenje željene kla-

se referentnih signala i/ili potiskivanje određene klase poremećaja. Stoga, smatraćemo da referentni signal generiše sljedeći linearni autonomni egzozisitem

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_r &= S_r \zeta_r, \zeta_r(0) = \zeta_{r0} \\ r &= C_r \zeta_r,\end{aligned}\tag{2.3}$$

dok poremećaj generiše egzozisitem

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_d &= S_d \zeta_d, \zeta_d(0) = \zeta_{d0} \\ d &= C_d \zeta_d,\end{aligned}\tag{2.4}$$

gdje su  $\zeta_{r0}$  i  $\zeta_{d0}$  proizvoljni početni uslovi. Egzozisitemi (2.3) i (2.4) mogu generisati široku klasu funkcija, poput kombinacija step funkcija raznih amplituda, rampa funkcija proizvoljnih nagiba i sinusoidalnih funkcija različitih amplituda i početnih faza. Ako se uvedu oznake

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_r \\ \zeta_d \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} S_r & 0 \\ 0 & S_d \end{bmatrix},\tag{2.5}$$

egzozisitemi (2.3) i (2.4) se mogu predstaviti jedinstvenim egzozisitemom čiji je model u prostoru stanja

$$\dot{\zeta} = S\zeta, \zeta(0) = \begin{bmatrix} \zeta_{r0} \\ \zeta_{d0} \end{bmatrix} = \zeta_0,\tag{2.6}$$

gdje je  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^q$  egzogeni signal koji predstavlja referentni ulaz koji treba pratiti i/ili eksterni poremećaj koji treba potisnuti. Stanje sistema, regulisani izlaz (greška u praćenju) i mjereni izlaz se onda mogu zapisati u sljedećoj formi

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + E\zeta, x(0) = x_0 \\ e &= Cx + Du + F\zeta \\ y_m &= C_m x + D_m u + F_m \zeta,\end{aligned}\tag{2.7}$$

gdje su  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,  $C_m \in \mathbb{R}^{p_m \times n}$ ,  $D_m \in \mathbb{R}^{p_m \times m}$ ,  $E \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{p \times q}$  i  $F_m \in \mathbb{R}^{p_m \times q}$  matrice odgovarajućih dimenzija, pri čemu je

$$\begin{bmatrix} E \\ F \\ F_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & E_d C_d \\ -C_r & F_d C_d \\ 0 & F_{dm} C_d \end{bmatrix}.$$

Treba napomenuti da je upravljani izlaz  $y(t)$  iz relacije (2.2) zamijenjen regulisanim izlazom  $e(t)$  u izrazu (2.7). Na ovaj način je problem asimptotskog praćenja referentnog signala  $r(t)$  preformulisan u problem asimptotske regulacije signala  $e(t)$ , pri čemu treba imati na umu da egzosistem (2.6) može generisati referentni signal i/ili poremećaj. Upravo iz tog razloga problem asimptotskog praćenja referentnog signala i potiskivanja poremećaja se jednostavno naziva OR problemom. Takođe, može se primijetiti da je model procesa (2.7) definisan pomoću devet konstantnih matrica. Smatraćemo da su svih devet matrica egzaktno poznate, tj. da je model procesa (2.7) u potpunosti poznat.

**Primjedba 2.1.** Kao što je pomenuto u Glavi 1, u literaturi je upravljani izlaz sistema  $y$  najčešće funkcija izmjenjenog izlaza  $y_m$ , dok je regulisani izlaz  $e$  funkcija upravljanog izlaza  $y$  i referentnog signala  $r$ . Samim tim, obično se smatra da su ova dva signala poznata, tj. da je moguće izmjeriti njihove vrijednosti [3]. Kod linearnih sistema, to znači da postoje poznate konstantne matrice  $P_1$  i  $P_2$  takve da važi  $y = P_1 y_m$  i  $e = P_2 y_m$ .

## 2.1.2 Sinteza upravljačkog zakona

Radi veće opštosti, nećemo smatrati da vektor  $\zeta$  ima oblik kao u (2.5), već ćemo smatrati da ga generiše egzosistem

$$\dot{\zeta} = S\zeta, \quad \zeta(0) = \zeta_0, \quad (2.8)$$

gdje je  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^q$  stanje egzosistema, dok je  $S$  poznata konstantna matrica.

Treba imati u vidu da je neke komponente egzogenog signala  $\zeta$  moguće izmjeriti, dok neke druge komponente nisu dostupne za mjerenje. Stoga, u nastavku će sa  $\zeta_u \in \mathbb{R}^{q_u}$  biti označene komponente vektora  $\zeta$  koje nisu dostupne za mjerenje, dok će komponente dostupne za mjerenje biti označene sa  $\zeta_m \in \mathbb{R}^{q_m}$ , gdje je  $0 \leq q_u, q_m \leq q$ , pri čemu važi  $q_u + q_m = q$ . Bez gubitka opštosti, biće usvojeno da su  $\zeta_u$  i  $\zeta_m$  stanja individualnih egzosistema, respektivno:

$$\dot{\zeta}_u = S_u \zeta_u, \quad \dot{\zeta}_m = S_m \zeta_m, \quad (2.9)$$

gdje su  $S_u$  i  $S_m$  konstantne matrice odgovarajućih dimenzija. Potrebno je primijetiti da se egzosistemi (2.9) mogu zapisati kao jedinstven egzosistem u formi (2.8), pri čemu je u tom slučaju  $\zeta = \text{col}(\zeta_u, \zeta_m)$  i  $S = \text{diag}(S_u, S_m)$ . Kako bi istakli da stanje  $\zeta$  može sadržati mjerljive

i nemjerljive komponente, proces (2.7) ćemo zapisati u sljedećem obliku

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + E_u \zeta_u + E_m \zeta_m, \quad x(0) = x_0, \\ e &= Cx + Du + F_{eu} \zeta_u + F_{em} \zeta_m \\ y_m &= C_m x + D_m u + F_{mu} \zeta_u + F_{mm} \zeta_m, \end{aligned} \quad (2.10)$$

gdje je  $E = [E_u \ E_m]$ ,  $F = [F_{eu} \ F_{em}]$  i  $F_m = [F_{mu} \ F_{mm}]$ .

Za upravljanje procesom koji je modelovan jednačinama (2.10), razmotrićemo sljedeći opšti oblik upravljačkog zakona

$$\begin{aligned} u &= K_z z + K_y y_m \\ \dot{z} &= G_1 z + G_2 y_m, \end{aligned} \quad (2.11)$$

gdje je  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  stanje kontrolera, pri čemu će dimenzija  $n_z$  biti specificirana kasnije, dok su  $(K_z, K_y, G_1, G_2)$  konstantne matrice pojačanja odgovarajućih dimenzija. Kontroler (2.11) se u literaturi naziva dinamičkim upravljačkim zakonom sa spregom po mjerenom izlazu [3].

Dinamički upravljački zakon sa spregom po mjerenom izlazu (2.11) sadrži sljedeća četiri upravljačka zakona kao specijalne slučajeve:

1. Statički upravljački zakon sa spregom po stanjima u slučaju kada je  $y_m = \text{col}(x, \zeta)$  i  $n_z = 0$ :

$$u = K_1 x + K_2 \zeta, \quad (2.12)$$

gdje su  $(K_1, K_2)$  konstantne matrice odgovarajućih dimenzija.

2. Strogo pravilan upravljački zakon sa spregom po mjerenom izlazu u slučaju kada je  $K_y = 0$ :

$$\begin{aligned} u &= K_z z \\ \dot{z} &= G_1 z + G_2 y_m. \end{aligned} \quad (2.13)$$

3. Upravljački zakon sa spregom po regulisanom izlazu u slučaju kada je  $y_m = e$  i  $K_y = 0$ :

$$\begin{aligned} u &= K_z z \\ \dot{z} &= G_1 z + G_2 e. \end{aligned} \quad (2.14)$$

4. Upravljački zakon sa spregom po regulisanom izlazu i *feedforward* elementom u slučaju



kada je  $y_m = \text{col}(e, \zeta)$ :

$$\begin{aligned} u &= K_z z + K_\zeta \zeta \\ \dot{z} &= G_1 z + G_e e + G_\zeta \zeta, \end{aligned} \quad (2.15)$$

gdje je  $K_y = [0_{m \times p} \quad K_\zeta]$  i  $G_2 = [G_e \quad G_\zeta]$ .

Pored prethodno nabrojanih upravljačkih zakona koji se najčešće razmatraju u literaturi, opšti upravljački zakon (2.11) sadrži kao specijalne slučajeve i neke druge upravljačke zakone [3].

Ako se izmjereni izlaz procesa (2.7) uvrsti u upravljački signal (2.11), dobija se izraz

$$u = K_z z + K_y (C_m x + D_m u + F_m \zeta), \quad (2.16)$$

odnosno

$$(I_m - K_y D_m) u = K_y C_m x + K_z z + K_y F_m \zeta.$$

Na osnovu prethodne relacije se zaključuje da je upravljački zakon (2.11) jednoznačno određen ako i samo ako je matrica  $(I_m - K_y D_m)$  nesingularna. Lako se može provjeriti da upravljački zakoni (2.12)–(2.15) zadovoljavaju uslov  $K_y D_m = 0$ , pa će u nastavku biti usvojena pretpostavka da važi jednakost  $K_y D_m = 0$ , iako je tehnički dovoljno pretpostaviti da je matrica  $I_m - K_y D_m$  nesingularna. U tom slučaju, upravljački signal (2.16) se svodi na oblik

$$u = K_y C_m x + K_z z + K_y F_m \zeta,$$

dok se upravljački zakon (2.11) može zapisati u proširenoj formi

$$\begin{aligned} u &= K_y C_m x + K_z z + K_y F_m \zeta \\ \dot{z} &= G_2 (C_m + D_m K_y C_m) x + (G_1 + G_2 D_m K_z) z + G_2 (F_m + D_m K_y F_m) \zeta. \end{aligned}$$

Koristeći prethodnu relaciju može se pokazati da se dinamika spregnutog sistema koji se sastoji od procesa (2.7) i kontrolera (2.11) može zapisati na sljedeći način

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c \zeta \\ e &= C_c x_c + D_c \zeta, \end{aligned} \quad (2.17)$$

gdje je  $x_c = \text{col}(x, z)$  stanje spregnutog sistema, dok su matrice u prostoru stanja spregnutog

sistema jednake:

$$A_c = \begin{bmatrix} A + BK_y C_m & BK_z \\ G_2(C_m + D_m K_y C_m) & G_1 + G_2 D_m K_z \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} E + BK_y F_m \\ G_2(F_m + D_m K_y F_m) \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} C + DK_y C_m & DK_z \end{bmatrix}, D_c = F + DK_y F_m.$$

U slučaju kada se koristi statički upravljački zakon sa spregom po stanjima (2.12) imamo  $y_m = \text{col}(x, \zeta)$  i  $n_z = 0$ . Dalje se dobija da je  $x_c = x$ ,  $K_y C_m = K_1$  i  $K_y F_m = K_2$ , što kao rezultat daje sljedeće matrice spregnutog sistema:

$$A_c = A + BK_1, B_c = E + BK_2$$

$$C_c = C + DK_1, D_c = F + DK_2.$$

U nastavku će biti formalno definisan problem regulacije izlaza u linearnim sistemima, tj. biće date osobine koje je potrebno da zadovolji spregnuti sistem.

**Problem 2.** (OR problem [3, 46]) Za sistem (2.10) i egzosistem (2.9), dizajnirati upravljački zakon (2.11) tako da za spregnuti sistem važe sljedeće osobine:

- **Osobina 2.1** Matrica  $A_c$  je Hurwitz stabilna;
- **Osobina 2.2** Za proizvoljna početna stanja  $x_c(0)$  i  $\zeta(0)$ , važi uslov  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ .

Za rješavanje ovog problema biće usvojene sljedeće pretpostavke:

**Pretpostavka 2.1.** Matrica  $S$  nema sopstvenih vrijednosti sa negativnim realnim dijelom, tj.  $\text{Re}(\lambda(S)) \geq 0$ .

**Pretpostavka 2.2.** Par  $(A, B)$  je stabilizabilan.

**Pretpostavka 2.3.** Par  $\left( \begin{bmatrix} C_m & F_{mu} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & E_u \\ 0 & S_u \end{bmatrix} \right)$  je detektabilan.

**Pretpostavka 2.4.** Linearne matrične jednačine

$$\begin{aligned} XS &= AX + BU + E \\ 0 &= CX + DU + F, \end{aligned} \tag{2.18}$$

imaju rješenje  $(X, U)$ .

**Primjedba 2.2.** Da bi bilo moguće stabilizovati matricu  $A_c$  upravljačkim zakonom sa spregom po stanjima i time zadovoljiti Osobinu 2.1, potrebno je da važi Pretpostavka 2.2. Pret-

postavka 2.3 zajedno sa Pretpostavkom 2.2 omogućava stabilizaciju matrice  $A_c$  u slučaju korišćenja upravljačkog zakona sa spregom po mjerenom izlazu. Pretpostavka 2.1 je usvojena bez gubitka opštosti kako bi se pojednostavila analiza rješivosti OR problema. Naime, ukoliko Pretpostavka 2.1 nije zadovoljena, bez gubitka opštosti se može pretpostaviti da je  $S = \text{diag}(S_1, S_2)$ , gdje matrica  $S_1$  zadovoljava Pretpostavku 2.1, dok sve sopstvene vrijednosti matrice  $S_2$  imaju negativan realni dio. Stoga, ukoliko upravljački zakon (2.11) rješava OR problem u slučaju kada je egzosistem zadat jednačinom  $\dot{\zeta}_1 = S_1 \zeta_1$ , tada će isti upravljački zakon riješiti OR problem i u slučaju kada je egzosistem opšteg oblika  $\dot{\zeta} = S \zeta$ . Ovo tvrđenje proizilazi iz činjenice da Pretpostavka 2.2 i/ili Pretpostavka 2.3 garantuju zadovoljenje Osobine 2.1, a sa druge strane sve dok spregnuti sistem zadovoljava Osobinu 2.1, egzogeni signali koji eksponencijalno konvergiraju ka nuli neće imati uticaja na Osobinu 2.2 [3].

**Primjedba 2.3.** Matrične jednačine (2.18) su u literaturi poznate pod nazivom regulatorske jednačine. U Lemi 2.2 će biti pokazano da je pod Pretpostavkom 2.1 moguće riješiti OR problem upravljačkim zakonom (2.11) samo ako su regulatorske jednačine rješive. Štaviše, ukoliko je OR problem riješen onda važi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - X\zeta(t)) = 0 \text{ i } \lim_{t \rightarrow \infty} (u(t) - U\zeta(t)) = 0,$$

za proizvoljne početne uslove. Iz prethodnog izraza je jasno da  $X\zeta$  i  $U\zeta$  predstavljaju vrijednosti stanja i upravljačkog signala spregnutog sistema u stacionarnom stanju, za koje je regulisani izlaz  $e(t)$  jednak nuli. Samim tim, može se zaključiti da je trajektorija spregnutog sistema u stacionarnom stanju određena rješenjima regulatorskih jednačina.

U nastavku će biti demonstrirano da rješenje regulatorskih jednačina ne samo da karakteriše trajektoriju sistema, već i da je to rješenje potrebno za dizajn upravljačkog zakona kojim se pokušava riješiti OR problem. Imajući u vidu važnost regulatorskih jednačina za rješavanje OR problema, u nastavku je data teorema u okviru koje je prezentovan uslov za rješivost regulatorskih jednačina u zavisnosti od matrica  $E$  i  $F$ .

**Teorema 2.1.** *Za proizvoljne matrice  $E$  i  $F$ , regulatorske jednačine (2.18) su rješive ako i samo ako važi sljedeća pretpostavka:*

**Pretpostavka 2.5.**

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda_i(S)I_n & B \\ C & D \end{bmatrix} = n + p, \quad i = 1, \dots, q.$$

*Dokaz.* Dokaz ove teoreme se može pronaći u [3]. □

**Primjedba 2.4.** Za određene parove matrica  $(E, F)$ , regulatorne jednačine mogu imati rješenje i kada Pretpostavka 2.5 nije zadovoljena. Ovaj slučaj se javlja kada važi

$$\text{vec} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} \in \text{Im}(Q),$$

gdje  $\text{Im}(Q)$  označava sliku matrice  $Q$  koja se definiše na sljedeći način

$$Q = S^T \otimes \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times m} \\ 0_{p \times n} & 0_{p \times m} \end{bmatrix} - I_q \otimes \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Za analizu rješivosti OR problema, potrebno je prethodno uvesti i sljedeći sistem jednačina:

$$X_c S = A_c X_c + B_c \tag{2.19a}$$

$$0 = C_c X_c + D_c. \tag{2.19b}$$

Sistem jednačina (2.19) naziva se regulatornim jednačinama spregnutog sistema i direktno je povezan sa Osobinom 2.2, što će biti pokazano u narednoj lemi.

**Lema 2.1.** *Neka je upravljački zakon (2.11) dizajniran tako da spregnuti sistem (2.17) zadovoljava Osobinu 2.1. Ukoliko postoji matrica  $X_c$  koja zadovoljava regulatorne jednačine spregnutog sistema (2.19), tada spregnuti sistem (2.17) zadovoljava Osobinu 2.2. Štaviše, ako važi Pretpostavka 2.1, tada je rješenje  $X_c$  regulatornih jednačina spregnutog sistema (2.19) jedinstveno.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da postoji matrica  $X_c$  koja zadovoljava sistem jednačina (2.19). Tada, za promjenljivu  $\bar{x}_c = x_c - X_c \zeta$  važi

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_c &= A_c \bar{x}_c \\ e &= C_c \bar{x}_c. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Kako je  $A_c$  Hurwitz stabilna matrica (Osobina 2.1), slijedi da je  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}_c(t) = 0$ , što dalje implicira  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ .

S druge strane, budući da je  $A_c$  Hurwitz stabilna matrica (Osobina 2.1) i da važi Pretpostavka 2.1, matrice  $X_c$  i  $A_c$  neće imati zajedničkih sopstvenih vrijednosti, pa će Silvesterova

jednačina (2.19a) imati jedinstveno rješenje  $X_c$  [46].  $\square$

**Primjedba 2.5.** Rješivost Silvestrove jednačine (2.19a) je zagarantovana sve dok su sopstvene vrijednosti matrice  $A_c$  različite od sopstvenih vrijednosti matrice  $S$  [3]. Samim tim, Pretpostavka 2.1 nije neophodna, već je dovoljno da se sopstvene vrijednosti matrice  $A_c$  ne poklapaju sa sopstvenim vrijednostima matrice  $S$ .

U narednoj lemi će biti pokazano da rješenje  $(X, U)$  regulatorskih jednačina (2.18) sigurno postoji ukoliko spregnuti sistem zadovoljava Osobine 2.1 i 2.2.

**Lema 2.2.** *Neka važi Pretpostavka 2.1 i neka je upravljački zakon (2.11) dizajniran tako da spregnuti sistem zadovoljava Osobine 2.1 i 2.2. Tada postoje matrice  $X$  i  $U$  koje zadovoljavaju regulatorске jednačine*

$$\begin{aligned} XS &= AX + BU + E \\ 0 &= CX + DU + F. \end{aligned} \quad (2.21)$$

*Dokaz.* Uzimajući u obzir pretpostavku da spregnuti sistem zadovoljava Osobine 2.1 i 2.2, iz Leme 2.1 slijedi da postoji matrica  $X_c$  koja zadovoljava matrične jednačine (2.19) koje se mogu zapisati u razvijenoj formi

$$\begin{aligned} X_c S &= \begin{bmatrix} A + BK_y C_m & BK_z \\ G_2(C_m + D_m K_y C_m)G_1 & G_1 + G_2 D_m K_z \end{bmatrix} X_c + \begin{bmatrix} E + BK_y F_m \\ G_2(F_m + D_m K_y F_m) \end{bmatrix} \\ 0 &= \begin{bmatrix} C + DK_y C_m & DK_z \end{bmatrix} X_c + F + DK_y F_m. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ako izvršimo particiju matrice

$$X_c = \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix},$$

gdje je  $X \in \mathbb{R}^{n \times q}$  i  $Z \in \mathbb{R}^{n_z \times q}$ , onda jednačinu (2.22) možemo zapisati na sljedeći način

$$\begin{aligned} XS &= (A + BK_y C_m)X + BK_z Z + (E + BK_y F_m) \\ ZS &= G_2(C_m + D_m K_y C_m)X + (G_1 + G_2 D_m K_z)Z + G_2(F_m + D_m K_y F_m) \\ 0 &= (C + DK_y C_m)X + DK_z Z + (F + DK_y F_m), \end{aligned}$$

što je ekvivalentno jednačinama

$$XS = AX + B(K_y C_m X + K_z Z + K_y F_m) + E \quad (2.23a)$$

$$ZS = G_2(C_m + D_m K_y C_m)X + (G_1 + G_2 D_m K_z)Z + G_2(F_m + D_m K_y F_m) \quad (2.23b)$$

$$0 = (CX + D(K_y C_m X + K_z Z + K_y F_m)) + F. \quad (2.23c)$$

Uvođenjem smjene  $U = K_y C_m X + K_z Z + K_y F_m$  u izrazima (2.23a) i (2.23c) pokazuje se da su  $X$  i  $U$  rješenja regulatorskih jednačina (2.21).  $\square$

U nastavku će fokus biti na postupku sinteze kontrolera sa spregom po stanjima (2.12), koji predstavlja najjednostavniji specijalni slučaj opšteg upravljačkog zakona (2.11). Kontroler (2.12) je definisan sa dvije konstantne matrice  $K_1$  i  $K_2$ , koje se nazivaju pojačanjem u povratnoj sprezi i *feedforward* pojačanjem, respektivno.

**Teorema 2.2.** *Neka važi Pretpostavka 2.2 i neka je pojačanje u povratnoj sprezi  $K_1$  dizajnirano tako da je  $(A + BK_1)$  Hurwitz stabilna matrica. OR problem se može riješiti statičkim upravljačkim zakonom (2.12), ukoliko važi Pretpostavka 2.4 i ukoliko feedforward pojačanje  $K_2$  zadovoljava relaciju*

$$K_2 = U - K_1 X. \quad (2.24)$$

*Dokaz.* Pretpostavka 2.2 garantuje postojanje odgovarajućeg pojačanja  $K_1$  za koje je matrica  $A_c = A + BK_1$  Hurwitz stabilna, što znači da je Osobinu 2.1 moguće zadovoljiti upravljačkim zakonom sa spregom po stanjima (2.12). Dalje, neka važi Pretpostavka 2.4 i neka je pojačanje  $K_2$  izračunato na osnovu relacije (2.24). Ako se uvede promjenljiva  $\bar{x} = x - X\zeta$ , dinamika spregnutog sistema se može zapisati u sljedećem obliku

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= (A + BK_1)\bar{x} \\ e &= (C + DK_1)\bar{x}. \end{aligned}$$

Kako je  $A + BK_1$  Hurwitz stabilna matrica, slijedi da  $\bar{x}(t) \rightarrow 0$  kada  $t \rightarrow \infty$ , a samim tim i  $e(t) \rightarrow 0$ , odakle se zaključuje da je zadovoljena i Osobina 2.2.  $\square$

**Primjedba 2.6.** Na osnovu Teoreme 2.2 i Leme 2.2 može se zaključiti da je za rješavanje OR problema pomoću statičkog upravljačkog zakona sa spregom po stanjima (2.12), uz Pretpostavku 2.1, takođe potrebno da važi i Pretpostavka 2.4.

U nastavku će biti opisan jedan mogući postupak sinteze dinamičkog upravljačkog zakona sa spregom po mjerenom izlazu (2.11). S obzirom da statički upravljački zakon sa spregom po

stanjima (2.12) zavisi od stanja procesa  $x$  i stanja egzosistema  $\zeta$ , prirodno je uvesti opserversere koji će estimirati ove promjenljive na osnovu izmjenenog izlaza. Prvi korak u konstrukciji opserversera je združivanje stanja procesa  $x$  i stanja egzosistema  $\zeta_u$  u jedan vektor, čime se dobija sljedeći sistem

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\zeta}_u \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & E_u \\ 0 & S_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \zeta_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} E_m \\ 0 \end{bmatrix} \zeta_m \\ y_m &= \begin{bmatrix} C_m & F_{mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \zeta_u \end{bmatrix} + D_m u + F_{mm} \zeta_m. \end{aligned}$$

Imajući u vidu strukturu standardnog Luenbergerovog opserversera, usvaja se sljedeći oblik upravljačkog zakona

$$\begin{aligned} u &= \begin{bmatrix} K_1 & K_{2u} \end{bmatrix} z + K_{2m} \zeta_m \\ \dot{z} &= \begin{bmatrix} A & E_u \\ 0 & S_u \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} E_m \\ 0 \end{bmatrix} \zeta_m + L \left( y_m - \begin{bmatrix} C_m & F_{mu} \end{bmatrix} z - D_m u - F_{mm} \zeta_m \right), \end{aligned} \quad (2.25)$$

gdje su  $K_{2u} \in \mathbb{R}^{m \times q_u}$  i  $K_{2m} \in \mathbb{R}^{m \times q_m}$  matrice pojačanja u upravljačkom signalu, dok je  $L \in \mathbb{R}^{(n+q_u) \times p_m}$  matrica pojačanja opserversera. Upravljački zakon (2.25) se može kompaktno zapisati u sljedećem obliku

$$\begin{aligned} u &= K_z z + K_{2m} \zeta_m \\ \dot{z} &= G_1 z + G_{21} y_m + G_{22} \zeta_m, \end{aligned} \quad (2.26)$$

gdje je

$$\begin{aligned} K_z &= \begin{bmatrix} K_1 & K_{2u} \end{bmatrix}, \\ G_1 &= \begin{bmatrix} A & E_u \\ 0 & S_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} K_z - L \left( \begin{bmatrix} C_m & F_{mu} \end{bmatrix} + D_m K_z \right), \\ G_{21} &= L, \quad G_{22} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} K_{2m} + \begin{bmatrix} E_m \\ 0 \end{bmatrix} - L(F_{mm} + D_m K_{2m}). \end{aligned}$$

Kako je stanje  $\zeta_m$  mjerljivo, to znači da postoji matrica  $C_\zeta$  takva da važi jednakost  $\zeta_m = C_\zeta y_m$ , što dalje implicira da se upravljački zakon (2.26) može zapisati u standardnoj formi (2.11), pri čemu je  $K_y = K_{2m} C_\zeta$  i  $G_2 = G_{21} + G_{22} C_\zeta$ .

**Teorema 2.3.** *Neka važe Pretpostavke 2.2-2.4 i neka su pojačanja  $K_1$  i  $K_2 = [K_{2u}, K_{2m}]$  određena po postupku opisanom u Teoremi 2.2. Tada se OR problem može riješiti upra-*

vlačkim zakonom sa spregom po mjerenom izlazu (2.25) ukoliko je pojačanje opservera  $L = \text{col}(L_1, L_2)$  dizajnirano na takav način da matrica

$$A_L = \begin{bmatrix} A & E_u \\ 0 & S_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_m & F_{mu} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A - L_1 C_m & E_u - L_1 F_{mu} \\ -L_2 C_m & S_u - L_2 F_{mu} \end{bmatrix},$$

bude Hurwitz stabilna.

*Dokaz.* Na početku je potrebno uočiti da je Pretpostavkom 2.2 zagarantovano postojanje pojačanja  $K_1$  za koje je matrica  $(A + BK_1)$  Hurwitz stabilna. Pored toga, Pretpostavka 2.3 implicira postojanje matrica  $L_1$  i  $L_2$  za koje je  $A_L$  Hurwitz stabilna matrica. Ako uvedemo smjene  $\bar{x} = x - X\zeta$ ,  $\bar{u} = u - U\zeta$  i

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} x \\ \zeta_u \end{bmatrix} - z,$$

dinamiku spregnutog sistema u novim koordinatama možemo izraziti na sljedeći način

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= (A + BK_1)\bar{x} - BK_z \bar{z} \\ \dot{\bar{z}} &= A_L \bar{z}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Neka je  $A_c = \begin{bmatrix} A+BK_1 & -BK_z \\ 0 & A_L \end{bmatrix}$  matrica stanja spregnutog sistema (2.27). Kako je  $\lambda(A_c) = \lambda(A + BK_1) \cup \lambda(A_L)$ , zaključujemo da važi Osobina 2.1.

Kako je  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}(t) = 0$  i  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{z}(t) = 0$ , lako se može pokazati da regulisani izlaz konvergira ka nuli, tj. da važi  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ , budući da je

$$\begin{aligned} e &= Cx + Du + F\zeta \\ &= C(x - X\zeta) + D(u - U\zeta) + (CX + DU + F)\zeta \\ &= C(\bar{x} - X\zeta) + D(\bar{u} - U\zeta) \\ &= (C + DK_1)\bar{x} - DK_z \bar{z}, \end{aligned}$$

što kompletira dokaz teoreme. □

**Primjedba 2.7.** Na osnovu dokaza Teoreme 2.3 može se izvesti zaključak da Pretpostavka 2.1 nije neophodna za rješavanje OR Problema pomoću dinamičkog upravljačkog zakona sa spregom po mjerenom izlazu. Međutim, ova pretpostavka je usvojena bez gubitka opštosti kako bi se izbjegao trivijalan slučaj kada je matrica  $S$  stabilna, kao što je već objašnjeno u Primjedbi 2.2.



Na kraju, u nastavku su date dvije posljedice Teoreme 2.3, koje se odnose na specijalne slučajeve upravljačkog zakona (2.26), kada je  $\zeta = \zeta_u$  i kada je  $\zeta = \zeta_m$ .

**Posljedica 2.1.** *Neka važe Pretpostavke 2.2-2.4 i neka je  $\zeta = \zeta_u$ . Tada se OR Problem može riješiti pomoću upravljačkog zakona zasnovanog na opserveru*

$$\begin{aligned} u &= [K_1 \quad K_2] z \\ \dot{z} &= \begin{bmatrix} A & E \\ 0 & S \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + L \left( y_m - \begin{bmatrix} C_m & F_m \end{bmatrix} z - D_m u \right), \end{aligned} \quad (2.28)$$

pri čemu se pojačanje opservera  $L \in \mathbb{R}^{(n+q) \times p_m}$  određuje tako da matrica  $\begin{bmatrix} A & E \\ 0 & S \end{bmatrix} - L \begin{bmatrix} C_m & F_m \end{bmatrix}$  bude Hurwitz stabilna.

**Posljedica 2.2.** *Neka važe Pretpostavke 2.2-2.4 i neka je  $\zeta = \zeta_m$ . Tada se OR Problem može riješiti pomoću upravljačkog zakona sa spregom po mjerenom izlazu i feedforward elementom*

$$\begin{aligned} u &= K_1 z + K_2 \zeta \\ \dot{z} &= Az + Bu + E\zeta + L(y_m - C_m z - D_m u - F_m \zeta), \end{aligned} \quad (2.29)$$

pri čemu se pojačanje opservera  $L \in \mathbb{R}^{n \times p_m}$  određuje tako da matrica  $A - LC$  bude Hurwitz stabilna.

## 2.2 Kooperativna regulacija izlaza u linearnim multiagentnim sistemima

U ovom poglavlju je prezentovan postupak za rješavanje problema kooperativne regulacije izlaza u linearnim multiagentnim sistemima koristeći pristup koji se zasniva na sintezi distribuiranog opservera. U Potpoglavlju 2.2.1 je najprije formalno definisan COR problem u linearnim multiagentnim sistemima. Nakon toga su diskutovani decentralizovani upravljački COR protokoli, iz kojih je izveden opšti distribuirani COR protokol zasnovan na opserveru. Postupak sinteze dvije specijalne forme opšteg COR protokola je opisan u Potpoglavlju 2.2.2. Na kraju, u Potpoglavlju 2.2.3 dat je ilustrativni primjer primjene COR protokola u upravljanju mikromrežama.

## 2.2.1 Problem kooperativne regulacije izlaza u linearnim multiagentnim sistemima

Razmotrimo problem kooperativne regulacije izlaza za grupu linearnih podsistema čiji je model dat u prostoru stanja

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A_i x_i + B_i u_i + E_i \zeta_0 \\ e_i &= C_i x_i + D_i u_i + F_i \zeta_0 \\ y_{mi} &= C_{mi} x_i + D_{mi} u_i + F_{mi} \zeta_0, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.30)$$

gdje su  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $e_i \in \mathbb{R}^{p_i}$ ,  $y_{mi} \in \mathbb{R}^{p_{mi}}$  i  $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  stanje, regulisani izlaz, mjereni izlaz i ulaz  $i$ -tog podsistema. Sa  $\zeta_0 \in \mathbb{R}^q$  je označeno stanje egzosistema čiji je model dat izrazom:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_0 &= S_0 \zeta_0 \\ y_{m0} &= W_0 \zeta_0, \end{aligned} \quad (2.31)$$

pri čemu je  $y_{m0} \in \mathbb{R}^{p_0}$  izmjereni izlaz egzosistema. Može se primijetiti da se sistem (2.30) svodi na sistem (2.7) u slučaju kada je  $N = 1$ .

Pretpostavke koje su neophodne za rješavanje COR problema, a koje se odnose na dinamiku podsistema su navedene u nastavku.

**Pretpostavka 2.6.** Matrica  $S_0$  nema sopstvenih vrijednosti sa negativnim realnim dijelom.

**Pretpostavka 2.7.** Parovi  $(A_i, B_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , su stabilizabilni.

**Pretpostavka 2.8.** Parovi  $(C_{mi}, A_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , su detektabilni.

**Pretpostavka 2.9.** Linearne matrične jednačine

$$\begin{aligned} X_i S_0 &= A_i X_i + B_i U_i + E_i \\ 0 &= C_i X_i + D_i U_i + F_i, \end{aligned} \quad (2.32)$$

imaju rješenja  $(X_i, U_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

**Primjedba 2.8.** Kao i kod klasične regulacije izlaza sistema, Pretpostavka 2.6 se uvodi bez gubitka opštosti da bi se olakšala tehnička analiza razmatranog problema. Pretpostavka 2.8 predstavlja specijalan slučaj Pretpostavke 2.3 u slučaju kada je stanje egzosistema  $\zeta_0$  mjerljivo, pri čemu je ova pretpostavka od naročitog značaja za dizajn upravljačkog zakona sa spregom po mjerenom izlazu i *feedforward* elementom (2.29).

Može se primijetiti da se MAS (2.30) može zapisati u formi (2.7) uvođenjem vektora

$x = \text{col}(x_1, \dots, x_N)$ ,  $u = \text{col}(u_1, \dots, u_N)$ ,  $y_m = \text{col}(y_{m1}, \dots, y_{mN})$  i  $e = \text{col}(e_1, \dots, e_N)$ . Samim tim, ukoliko je stanje egzosistema  $\zeta_0$  poznato svim pratiocima i ukoliko važe Pretpostavke 2.7 i 2.9, iz Teoreme 2.2 slijedi da se COR problem za MAS (2.30)-(2.31) može riješiti pomoću decentralizovanog upravljačkog zakona sa spregom po stanjima

$$u_i = K_{1i}x_i + K_{2i}\zeta_0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.33)$$

Pojačanje  $K_{1i}$  se određuje tako da matrica  $A_i + B_i K_{1i}$  bude Hurwitz stabilna, dok se pojačanje  $K_{2i}$  računa na osnovu relacije  $K_{2i} = U_i - K_{1i}X_i$ . Slično, Pretpostavka 2.8 garantuje postojanje pojačanja  $\ell_i \in \mathbb{R}^{n_i \times p_{mi}}$  za koje je matrica  $A_i - \ell_i C_{mi}$  Hurwitz stabilna. Samim tim, iz Posljedice 2.2 slijedi da se pod Pretpostavkama 2.7-2.9, COR problem za MAS (2.30)-(2.31) može riješiti i decentralizovanim upravljačkim zakonom sa spregom po mjerenom izlazu i *feedforward* elementom

$$\begin{aligned} u_i &= K_{1i}z_i + K_{2i}\zeta_0, \quad i = 1, \dots, N \\ \dot{z}_i &= A_i z_i + B_i u_i + E_i \zeta_0 + \ell_i (y_{mi} - C_{mi} z_i - D_{mi} u_i - F_{mi} \zeta_0). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Upravljački zakoni (2.33) i (2.34) predstavljaju specijalne slučajeve opšteg decentralizovanog upravljačkog zakona

$$\begin{aligned} u_i &= K_{zi}z_i + K_{yi}y_{mi} + K_{\zeta i}\zeta_0 \\ \dot{z}_i &= G_{1i}z_i + G_{2i}y_{mi} + G_{3i}\zeta_0, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.35)$$

gdje je  $z_i \in \mathbb{R}^{n_{zi}}$  stanje kontrolera, dok su  $K_{zi}$ ,  $K_{yi}$ ,  $K_{\zeta i}$ ,  $G_{1i}$ ,  $G_{2i}$  i  $G_{3i}$  konstantne matrice pojačanja odgovarajućih dimenzija. Ako primijenimo upravljačke zakone (2.35) na podsisteme definisane sa (2.30), pod pretpostavkom da je  $K_{yi}D_{mi} = 0$ , dobijamo sljedeće spregnute podsisteme

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ci} &= A_{ci}x_{ci} + B_{ci}\zeta_0 \\ e_i &= C_{ci}x_{ci} + D_{ci}\zeta_0, \end{aligned} \quad (2.36)$$

gdje je  $x_{ci} = \text{col}(x_i, z_i)$ , dok su matrice  $A_{ci}$ ,  $B_{ci}$ ,  $C_{ci}$  i  $D_{ci}$  jednake:

$$\begin{aligned} A_{ci} &= \begin{bmatrix} A_i + B_i K_{y_i} C_{m_i} & B_i K_{z_i} \\ G_{2i}(C_{m_i} + D_{m_i} K_{y_i} C_{m_i}) & G_{1i} + G_{2i} D_{m_i} K_{z_i} \end{bmatrix} \\ B_{ci} &= \begin{bmatrix} E_i + B_i K_{y_i} F_{m_i} + B_i K_{z_i} \\ G_{2i}(F_{m_i} + D_{m_i}(K_{y_i} F_{m_i} + K_{z_i})) + G_{3i} \end{bmatrix} \\ C_{ci} &= \begin{bmatrix} C_i + D_i K_{y_i} C_{m_i} & D_i K_{z_i} \end{bmatrix}, \quad D_{ci} = F_i + D_i K_{y_i} F_{m_i} + D_i K_{z_i}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Pretpostavimo da su pojačanja decentralizovanog upravljačkog zakona (2.35) odabrana na takav način da su matrice  $A_{ci}$  Hurwitz stabilne. Tada, iz Leme 2.1 slijedi da postoji jedinstvena matrica  $X_{ci}$  koja zadovoljava matrične jednačine

$$\begin{aligned} X_{ci} S_0 &= A_{ci} X_{ci} + B_{ci} \\ 0 &= C_{ci} X_{ci} + D_{ci}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Dalje, ako uvedemo smjenu  $\bar{x}_{ci}(t) = x_{ci}(t) - X_{ci} \zeta_0(t)$ , dinamiku spregnutih podsistema (2.36) možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_{ci} &= A_{ci} \bar{x}_{ci} \\ e_i &= C_{ci} \bar{x}_{ci}, \end{aligned}$$

odakle se može zaključiti da će regulisani izlaz konvergirati ka nuli, tj. da upravljački zakon (2.35) može riješiti COR problem.

Važno je napomenuti da je u praksi komunikacija između pojedinih podsistema u (2.30)-(2.31) uslovljena različitim ograničenjima, kao što je fizičko rastojanje između podsistema. Samim tim, informacija o stanju  $\zeta_0$  ili mjerenom izlazu  $y_{m0}$  egzosistema najčešće nije dostupna svim agentima. Iz tog razloga nije moguće direktno implementirati opšti decentralizovani upravljački zakon (2.35), niti njegove specijalne forme. Kako bi modelovali komunikaciona ograničenja između agenata, sisteme (2.30)-(2.31) ćemo posmatrati kao jedinstveni MAS kod koga podsistemi (2.30) predstavljaju pratioce, dok egzosistem (2.31) ima ulogu lidera. Neka je  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  komunikacioni graf, definisan skupom čvorova  $\mathcal{V} = \{0, 1, \dots, N\}$  i skupom grana  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ , gdje čvor 0 odgovara lideru (2.31), dok čvor  $i$ , za  $i = 1, \dots, N$ , označava  $i$ -tog pratioca (2.30). Skup  $\mathcal{E}$  sadrži granu  $(j, i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ ,  $i \neq j$ , ako i samo ako je agent  $j$  u mogućnosti da šalje informacije od interesa  $i$ -tom agentu. Skup susjeda čvora  $i$  ćemo označiti sa  $\mathcal{N}_i = \{j : (j, i) \in \mathcal{E}\}$ .

Polazeći od opšteg decentralizovanog upravljačkog zakona (2.35), moguće je konstruisati

sljedeću klasu distribuiranih upravljačkih zakona

$$u_i = K_{zi}z_i + K_{yi}y_{mi} + K_{\zeta i}\zeta_i \quad (2.39a)$$

$$\dot{z}_i = G_{1i}z_i + G_{2i}y_{mi} + G_{3i}\zeta_i \quad (2.39b)$$

$$\dot{\zeta}_i = g_i(\zeta_i, y_{mi}, \zeta_j, y_{mj}, j \in \mathcal{N}_i), \quad (2.39c)$$

gdje su  $K_{zi}$ ,  $K_{yi}$ ,  $K_{vi}$ ,  $G_{1i}$ ,  $G_{2i}$  i  $G_{3i}$  matrice pojačanja odgovarajućih dimenzija, dok je  $g_i(\cdot)$  linearna funkcija koju treba dizajnirati tako da  $\zeta_i$  konvergira ka stvarnom stanju egzosistema  $\zeta_0$ . Drugim riječima, (2.39c) predstavlja distribuirani opservers stanja egzosistema. Potrebno je naglasiti da se informacija o stanju/izmjenom izlazu egzosistema u upravljačkom zakonu  $i$ -tog podsistema koristi ako i samo ako je lider susjed tog agenta. Iz prethodnog se može zaključiti da su ograničenja u komunikaciji uvažena, tj. da je (2.39) distribuirani upravljački zakon.

U nastavku će biti formalno definisan COR problem.

**Problem 3.** (*COR problem [3]*) Za multiagentni sistem (2.30)-(2.31) čija je komunikaciona topologija opisana grafom  $\mathcal{G}$ , dizajnirati distribuirani upravljački zakon oblika (2.39) tako da spregnuti sistem ima sljedeće dvije osobine:

- **Osobina 3.1** Ekvilibrijum spregnutog sistema je asimptotski stabilan za  $\zeta_0 = 0$ .
- **Osobina 3.2** Za bilo koje početne uslove  $x_i(0)$ ,  $z_i(0)$ ,  $\zeta_i(0)$ ,  $\zeta_0(0)$ , regulisani izlaz  $e_i(t)$  konvergira ka nuli, tj.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Potrebno je napomenuti da rješivost COR problema ne zavisi samo od dinamike individualnih podsistema (2.30)-(2.31), već i od topologije grafa  $\mathcal{G}$ . Stoga, smatraće se da važi standardna Pretpostavka 1.1, tj. da graf  $\mathcal{G}$  sadrži razapinjuće stablo sa liderom kao korijenom. Pored grafa  $\mathcal{G}$ , potrebno je uvesti i podgraf  $\bar{\mathcal{G}} = (\bar{\mathcal{V}}, \bar{\mathcal{E}})$ , kod kojeg je  $\bar{\mathcal{V}} = \{1, \dots, N\}$ , dok se  $\bar{\mathcal{E}} \subseteq \bar{\mathcal{V}} \times \bar{\mathcal{V}}$  dobija tako što se iz skupa  $\mathcal{E}$  uklone grane između čvora 0 i čvorova iz skupa  $\bar{\mathcal{V}}$ .

U nastavku su prezentovani rezultati koji će u narednom potpoglavlju biti od koristi za analizu rješivosti COR problema upravljačkim zakonom oblika (2.39).

**Lema 2.3.** *Neka važe Pretpostavke 2.6-2.9 i neka je decentralizovani upravljački zakon (2.35) dizajniran tako da rješava COR problem za MAS (2.30)-(2.31). Dalje, neka su  $\delta_{ui} : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^{m_i}$  i  $\delta_{zi} : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^{n_{zi}}$  dio-po-dio kontinualne funkcije koje zadovoljavaju*

uslove  $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_{ui}(t) = 0$  i  $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_{zi}(t) = 0$ . Tada, upravljački zakon

$$\begin{aligned} u_i &= K_{zi}z_i + K_{yi}y_{mi} + K_{\zeta i}\zeta_0 + \delta_{ui} \\ \dot{z}_i &= G_{1i}z_i + G_{2i}y_{mi} + G_{3i}\zeta_0 + \delta_{zi}, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

takođe rješava COR problem, tj. važi  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0$ .

*Dokaz.* Dokaz leme se može naći u Lemi 8.1 iz [3]. □

Iz prethodne leme može se izvesti sljedeća posljedica.

**Posljedica 2.3.** *Neka važe Pretpostavke 2.6-2.9 i neka je decentralizovani upravljački zakon (2.35) dizajniran tako da rješava COR Problem. Dalje, neka je  $\mathcal{S}(t) \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_\xi}$  dio-po-dio kontinualna i uniformno ograničena funkcija na intervalu  $[0, \infty)$ , takva da je ekvilibrijum sistema  $\dot{\zeta} = \mathcal{S}(t)\zeta$  asimptotski stabilan. Tada, upravljački zakon*

$$\begin{aligned} u_i &= K_{zi}z_i + K_{yi}y_{mi} + K_{\zeta i}\zeta_0 + K_{ui}\zeta \\ \dot{z}_i &= G_{1i}z_i + G_{2i}y_{mi} + G_{3i}\zeta_0 + K_{zi}\zeta \\ \dot{\zeta} &= \mathcal{S}(t)\zeta, \end{aligned}$$

gdje su  $K_{ui}$  i  $K_{zi}$  proizvoljne matrice odgovarajućih dimenzija, takođe rješava COR problem.

## 2.2.2 Sinteza upravljačkog zakona zasnovanog na distribuiranom opserveru stanja egzosistema

Postoje brojni načini da se izvrši sinteza distribuiranog opservera u upravljačkom zakonu (2.39) [23, 26, 50]. U ovom potpoglavlju ćemo koristiti distribuirani opserver egzosistema, koji smo prethodno definisali u Glavi 1:

$$\dot{\zeta}_i = S_0\zeta_i + \mu L_0 \sum_{j=0}^N a_{ij} W_0 (\zeta_j - \zeta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.40)$$

gdje je  $\mu > 0$  skalar,  $L_0 \in \mathbb{R}^{q \times p_0}$  je pojačanje opservera, dok je  $\mathcal{A} = [a_{ij}]_{i,j=0}^N$  težinska matrica susjedstva grafa  $\mathcal{G}$ .

Polazeći od decentralizovanih upravljačkih zakona (2.33) i (2.34), u nastavku će biti razmotrena dva specijalna tipa opšteg distribuiranog upravljačkog zakona (2.39):

1. Distribuirani upravljački zakon sa spregom po stanjima:

$$\begin{aligned} u_i &= K_{1i}x_i + K_{2i}\zeta_i \\ \dot{\zeta}_i &= S_0\zeta_i + \mu L_0 \sum_{j=0}^N a_{ij}W_0(\zeta_j - \zeta_i), \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.41)$$

kod kojeg se pojačanje  $K_{1i} \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}$  određuje tako da matrica  $A_i + B_i K_{1i}$  bude Hurwitz stabilna, dok se pojačanje  $K_{2i}$  dobija iz relacije  $K_{2i} = U_i - K_{1i}X_i$ .

2. Distribuirani upravljački zakon sa spregom po mjerenom izlazu i *feedforward* elementom:

$$\begin{aligned} u_i &= K_{1i}z_i + K_{2i}\zeta_i \\ \dot{z}_i &= A_i z_i + B_i u_i + E_i \zeta_i + \ell_i (y_{mi} - C_{mi} z_i - D_{mi} u_i - F_{mi} \zeta_i) \\ \dot{\zeta}_i &= S_0 \zeta_i + \mu L_0 \sum_{j=0}^N a_{ij} W_0 (\zeta_j - \zeta_i), \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.42)$$

kod kojeg se pojačanje  $\ell_i \in \mathbb{R}^{n_i \times p_{mi}}$  određuje tako da matrica  $A_{Li} = A_i - \ell_i C_{mi}$  bude Hurwitz stabilna.

**Primjedba 2.9.** Sinteza upravljačkih zakona (2.41) i (2.42) je zasnovana na CE principu (eng. *certainty equivalence principle* [3]). Drugim riječima, oba upravljačka zakona su izvedena iz decentralizovanih upravljačkih zakona (2.33) i (2.34) tako što su stvarna stanja egzosistema  $\zeta_0$  zamijenjena estimiranim stanjima  $\zeta_i$  koja se dobijaju pomoću distribuiranog opserversa (2.40), pri čemu se  $\zeta_i$  računa od strane  $i$ -tog agenta.

Neka  $\tilde{\zeta}_i = \zeta_i - \zeta_0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , predstavlja grešku u estimaciji  $i$ -tog agenta i neka je  $\tilde{\zeta} = \text{col}(\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_N)$  vektor koji se formira združivanjem grešaka u estimaciji pojedinačnih agenata. U Potpoglavlju 1.4 je pokazano da za dinamiku greške u estimaciji važi izraz

$$\dot{\tilde{\zeta}} = ((I_N \otimes S_0) - \mu(H \otimes L_0 W_0))\tilde{\zeta}. \quad (2.43)$$

U nastavku će biti pažnja biti posvećena analizi rješivosti COR problema upravljačkim zakonima (2.41) i (2.42).

**Lema 2.4.** *Ukoliko je ekvilibrijum sistema (2.43) asimptotski stabilan, onda važe sljedeća tvrđenja:*

1. Pod Pretpostavkama 2.6, 2.7 i 2.9, COR problem se može riješiti distribuiranim upravljačkim zakonom sa spregom po stanjima (2.41).
2. Pod Pretpostavkama 2.6-2.9, COR problem se može riješiti distribuiranim upravljačkim

zakonom sa spregom po mjerenom izlazu i *feedforward* elementom (2.42).

*Dokaz.* Tvrdjenje 1: Distribuirani upravljački zakon sa spregom po stanjima (2.41) može se zapisati u sljedećoj formi

$$\begin{aligned} u_i &= K_{1i}x_i + K_{2i}\zeta_0 + K_{2i}\tilde{\zeta}_i, \quad i = 1, \dots, N, \\ \dot{\tilde{\zeta}} &= ((I_N \otimes S) - \mu(H \otimes L_0W_0))\tilde{\zeta}, \end{aligned}$$

pri čemu je  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\zeta}(t) = 0$ , budući da je ekvilibrijum sistema (2.43) asimptotski stabilan. Kako se COR Problem može riješiti decentralizovanim upravljačkim zakonom sa spregom po stanjima (2.33), dokaz je lako kompletirati primjenom rezultata iz Posljedice 2.3.

Tvrdjenje 2: Decentralizovani upravljački zakon sa spregom po mjerenom izlazu i *feedforward* elementom (2.34) može se zapisati na sljedeći način

$$\begin{aligned} u_i &= k_i(z_i, \zeta_0), \quad i = 1, \dots, N, \\ \dot{z}_i &= g_i(z_i, k_i(z_i, \zeta_0), y_{mi}, \zeta_0). \end{aligned}$$

Slično važi i za distribuirani upravljački zakon sa spregom po mjerenom izlazu i *feedforward* elementom (2.42):

$$\begin{aligned} u_i &= k_i(z_i, \zeta_i), \quad i = 1, \dots, N, \\ \dot{z}_i &= g_i(z_i, k_i(z_i, \zeta_i), y_{mi}, \zeta_i), \\ \dot{\tilde{\zeta}} &= ((I_N \otimes S_0) - \mu(H \otimes L_0W_0))\tilde{\zeta}. \end{aligned}$$

Lako se može pokazati da važe jednakosti

$$k_i(z_i, \zeta_i) = k_i(z_i, \tilde{\zeta}_i + \zeta_0) = k_i(z_i, \zeta_0) + K_{2i}\tilde{\zeta}_i \quad (2.44)$$

i

$$\begin{aligned} g_i(z_i, k_i(z_i, \zeta_i), y_{mi}, \zeta_i) &= g_i(z_i, k_i(z_i, \zeta_0) + K_{2i}\tilde{\zeta}_i, y_{mi}, \tilde{\zeta}_i + \zeta_0) \\ &= g_i(z_i, k_i(z_i, \zeta_0), y_{mi}, \zeta_0) + \Gamma_i\tilde{\zeta}_i, \end{aligned} \quad (2.45)$$

gdje je  $\Gamma_i = B_iK_{2i} + E_i - \ell_i(F_{mi} + D_{mi}K_{2i})$ .

Kako se pod dodatnom Pretpostavkom 2.8 COR problem može riješiti decentralizovanim upravljačkim zakonom sa spregom po mjerenom izlazu i *feedforward* elementom (2.34), uzimajući u obzir činjenicu da je  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\zeta}_i(t) = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , dokaz je lako kompletirati primjenom rezultata iz Posljedice 2.3.  $\square$

Konačno, kombinovanjem Leme 2.4 i Teorema 1.1-1.2, u kojima je prezentovan metod



za dizajn distribuiranog opservera uz uslov da važe Pretpostavke 1.1, 1.2, dobijaju se sljedeći rezultati.

**Teorema 2.4.** *Neka važe Pretpostavke 1.1, 1.2, 2.6, 2.7 i 2.9. Tada je COR problem moguće riješiti distribuiranim upravljačkim zakonom sa spregom po stanjima (2.41). Pod dodatnom Pretpostavkom 2.8, COR problem se može riješiti distribuiranim upravljačkim zakonom sa spregom po mjerenom izlazu i feedforward elementom (2.42).*

**Primjedba 2.10.** Iz Teorema 1.1 i 1.2 slijedi da se pojačanje opservera može odrediti iz relacije  $L_0 = \mu P_0 W_0^T$ , gdje je  $P_0 > 0$  jedinstveno rješenje jednačine  $P_0 S_0^T + S_0 P_0 - P_0 W_0^T W_0 P_0 + I_q = 0$ , pri čemu parametar  $\mu$  treba da zadovoljava uslov  $\mu \geq \frac{1}{2} \lambda_H^{-1}$ . U slučaju kada je  $y_{m0} = \zeta_0$ , Pretpostavka 1.2 će biti automatski zadovoljena, pa se pojačanje opservera može dobiti iz relacije  $L_0 = \mu I_q$  za  $\mu > \bar{\lambda}_{S_0} \lambda_H^{-1}$ . Ukoliko matrica  $S_0$  nema sopstvenih vrijednosti sa pozitivnim realnim dijelom, onda parametar  $\mu$  može biti bilo koji pozitivni realni broj.

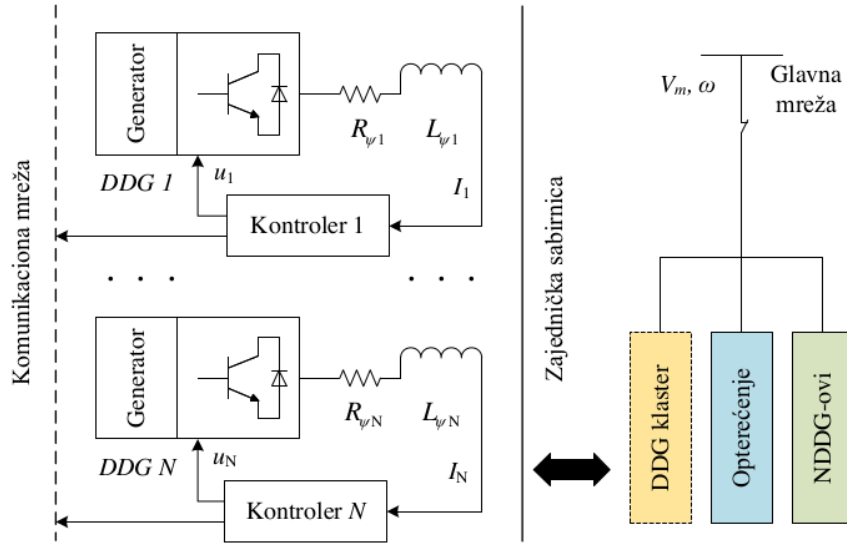
**Primjedba 2.11.** U distribuiranim upravljačkim zakonima (2.41) i (2.42) podrazumijevano je da svaki pratilac poznaje matricu stanja lidera  $S_0$ . Kako bi se eliminisala ova pretpostavka, u literaturi su predloženi COR protokoli zasnovani na adaptivnom distribuiranom opserveru, koji ima i mogućnost estimacije nepoznatih parametara egzosistema [3, 5, 44, 45, 51]:

$$\begin{aligned} \hat{S}_i &= \mu_S \sum_{j=0}^N a_{ij} (S_j - S_i) \\ \hat{\zeta}_i &= S_i \zeta_i + \mu_\zeta \sum_{j=0}^N a_{ij} (\zeta_j - \zeta_i), \end{aligned} \tag{2.46}$$

gdje matrica  $S_i$  predstavlja estimaciju matrice  $S_0$ . Odgovarajućim odabirom pojačanja  $\mu_S$  i  $\mu_\zeta$  može se postići eksponencijalna stabilnost estimatora (2.46).

### 2.2.3 Primjena COR-a u regulaciji snage mikromreža povezanih na glavnu mrežu

U ovom dijelu će biti demonstrirana primjena prethodno prezentovanog COR protokola za rješavanje praktičnog problema regulacije izlazne snage u mikromreži povezanoj na glavnu mrežu, koja je šematski prikazana na slici 2.2 [52]. Mikromreža se sastoji od neupravljivih distribuiranih generatora (eng. *non-dispatchable distributed generator*, NDDG) poput generatora koji su zasnovani na solarnoj energiji i energiji vjetra, opterećenja i klastera upravljivih distribuiranih generatora (eng. *dispatchable distributed generator*, DDG), kao što su baterije i zamajci. S obzirom da neupravljivi generatori imaju promjenljivu proizvodnju, da bi se po-



Slika 2.2: Mikromreža povezana na glavnu mrežu.

stigao željeni profil proizvodnje, DDG klaster od kontrolera višega nivoa dobija informaciju o željenoj izlaznoj snazi.

Neka su  $\omega$  i  $V_m = \text{col}(V_{md}, V_{mq})$  ugaona frekvencija i napon na sabirnicama glavne mreže, respektivno, za koje se smatra da su poznati. Pretpostavimo da se DDG klaster sastoji od  $N$  individualnih DDG-ova. U d-q koordinatnom sistemu, model u prostoru stanja  $i$ -tog DDG-a je

$$\dot{x}_i = A_{\psi i} x_i + B_{\psi i} u_{i,dq}$$

$$y_i = C_i x_i,$$

gdje su matrice  $A_{\psi i}$ ,  $B_{\psi i}$  i  $C_i$  jednake

$$A_{\psi i} = \begin{bmatrix} -R_{\psi i}/L_{\psi i} & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & -R_{\psi i}/L_{\psi i} & 0 & 0 \\ \omega_c V_{md} & \omega_c V_{mq} & -\omega_c & 0 \\ -\omega_c V_{mq} & \omega_c V_{md} & 0 & -\omega_c \end{bmatrix}, \quad B_{\psi i} = \begin{bmatrix} 1/L_{\psi i} & 0 \\ 0 & 1/L_{\psi i} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Frekvencija  $\omega_c$  označava presječnu frekvenciju niskopropusnog filtra. Za  $i$ -ti DDG,  $R_{\psi i}$  i  $L_{\psi i}$  označavaju otpornost i induktivnost  $L$  filtra kao što je prikazano na slici 2.2, dok je  $y_i = \text{col}(P_i, Q_i)$ , pri čemu  $P_i$  i  $Q_i$  označavaju aktivnu i reaktivnu snagu, respektivno.

Cilj je da se izvrši sinteza distribuiranog upravljačkog zakona sa spregom po stanjima (2.41) koji omogućava da komponente upravljanog izlaza  $y_i$  asimptotski prate referentnu aktivnu snagu  $P_0(t)$  i referentnu reaktivnu snagu  $Q_0(t)$ . Konkretno, usvojićemo da je referentna aktivna snaga zadata rampa funkcijom

$$P_0(t) = at + b, \quad (2.47)$$

gdje su  $a$  i  $b$  konstante, dok je referentna reaktivna snaga  $Q_0(t)$  identički jednaka nuli.

Dati problem se lako može preformulisati u COR problem. Neka je model egzosistema

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \zeta_0, \quad \zeta_0(0) = \begin{bmatrix} \zeta_{01}(0) \\ \zeta_{02}(0) \end{bmatrix}, \\ y_{m0} &= \zeta_0, \\ y_0 &= F_0 \zeta_0, \end{aligned} \quad (2.48)$$

gdje je

$$F_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lako se može pokazati da su stanja egzosistema jednaka

$$\zeta_0(t) = \begin{bmatrix} \zeta_{02}(0)t + \zeta_{01}(0) \\ \zeta_{02}(0) \end{bmatrix}.$$

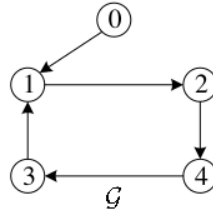
Ako za početne vrijednosti stanja egzosistema usvojimo  $\zeta_0(0) = [b \ a]^T$ , dobija se

$$\zeta_0(t) = \begin{bmatrix} at + b \\ 1 \end{bmatrix},$$

odnosno

$$y_0(t) = F_0 \zeta_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} at + b \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0(t) \\ Q_0(t) \end{bmatrix}.$$

Ukoliko se usvoji da je  $e_i = C_i x_i + F_i \zeta_0$ , gdje je  $F_i = -F_0$ , prethodno opisani problem regulacije snage se može preformulisati u problem kooperativne regulacije izlaza multiagentnog


 Slika 2.3: Komunikacioni graf  $\mathcal{G}$ .

sistema:

$$\dot{x}_i = A_{\psi_i} x_i + B_{\psi_i} u_{i,dq}$$

$$e_i = C_i x_i + F_i \zeta_0$$

$$y_{mi} = x_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

gdje egzosistem (2.48) ima ulogu lidera. Lako se može provjeriti da su Pretpostavke 1.3, 2.6 i 2.7 zadovoljene.

**Primjer.** Razmotrimo konkretan primjer mikromreže koja se sastoji od  $N = 5$  agenata. Ostali parametri sistema su:  $\omega = 314$  rad/s,  $\omega_c = 31.4$  rad/s,  $V_{md} = 460$  V,  $V_{mq} = 0$  V,  $R_i = 0.1$   $\Omega$ ,  $L_i = 1.35$  mH. Komunikaciona mreža je predstavljena grafom  $\mathcal{G}$  na slici 2.3, pri čemu čvor 0 odgovara egzosistemu tj. lideru, dok ostali čvorovi odgovaraju DDG-ovima. Matrica susjedstva grafa  $\mathcal{G}$  je

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lako se može provjeriti da za ovako definisan komunikacioni graf važi Pretpostavka 1.1. Takođe, može se potvrditi da važe i Pretpostavke 2.6 i 2.9 za matrice

$$X_i = \begin{bmatrix} \frac{V_{md}}{V_{md}^2 + V_{mq}^2} & \frac{aV_{md}}{\omega_c(V_{md}^2 + V_{mq}^2)} \\ \frac{V_{mq}}{V_{md}^2 + V_{mq}^2} & \frac{aV_{mq}}{\omega_c(V_{md}^2 + V_{mq}^2)} \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{460} & \frac{a}{14444} \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_i = \begin{bmatrix} \frac{R_{\psi_i} V_{md} + L_{\psi_i} \omega V_{mq}}{V_{md}^2 + V_{mq}^2} & \frac{a(R_{\psi_i} + \omega_c L_{\psi_i}) V_{md} + a \omega L_{\psi_i} V_{mq}}{\omega_c (V_{md}^2 + V_{mq}^2)} \\ \frac{R_{\psi_i} V_{mq} - L_{\psi_i} \omega V_{md}}{V_{md}^2 + V_{mq}^2} & \frac{a(R_{\psi_i} + \omega_c L_{\psi_i}) V_{mq} - a \omega L_{\psi_i} V_{md}}{\omega_c (V_{md}^2 + V_{mq}^2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.1}{460} & \frac{0.14239a}{14444} \\ -\frac{0.4239}{460} & -\frac{0.4239a}{14444} \end{bmatrix}.$$

Da bi primjer bio interesantniji, u određenim trenucima se vrši resetovanje drugog stanja egzosistema, tj. parametra  $a$ :

$$a = \begin{cases} 50\text{W/s}, & t = 0\text{s}; \\ 0\text{W/s}, & t = 10\text{s}; \\ -50\text{W/s}, & t = 20\text{s}. \end{cases}$$

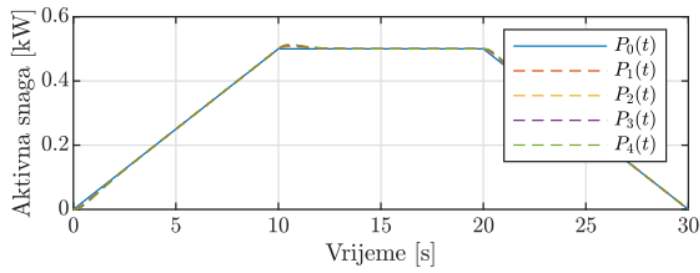
Parametar  $\mu$  u upravljačkom zakonu (2.41) ima vrijednost  $\mu = 10$ . Pojačanje  $K_{1i}$  se određuje na takav način da važi  $\lambda(A_i + B_i K_{1i}) = \{-100, -200, -300, -400\}$ , odnosno

$$K_{1i} = \begin{bmatrix} -0.8026 & 0.4239 & -0.0093 & 0 \\ -0.4239 & -0.2626 & 0 & -0.0011 \end{bmatrix},$$

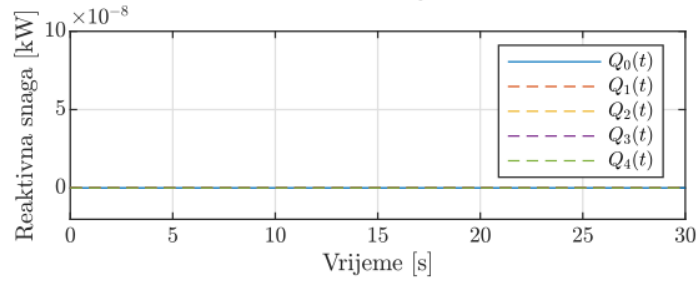
dok se pojačanje  $K_{2i}$  računa na sljedeći način

$$\begin{aligned} K_{2i} &= U_i - K_{1i} X_i \\ &= \begin{bmatrix} \frac{0.1}{460} & \frac{0.14239a}{14444} \\ -\frac{0.4239}{460} & -\frac{0.4239a}{14444} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.8026 & 0.4239 & -0.0093 & 0 \\ -0.4239 & -0.2626 & 0 & -0.0011 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{460} & \frac{a}{14444} \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.01126 & \frac{0.94499a}{14444} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vremenske karakteristike aktivne i reaktivne snage svih DDG-ova su prikazane na slici 2.4. Vremenska zavisnost greške u praćenju željene aktivne snage prikazana je na slici 2.5. S obzirom na to da je  $Q_0(t) = 0$ , greška u praćenju reaktivne snage odgovara trenutnoj reaktivnoj snazi prikazanoj na slici 2.4b. Može se uočiti da greške DDG-ova u praćenju željene snage konvergiraju ka nuli, što ukazuje na to da je zadati cilj upravljanja uspješno postignut.

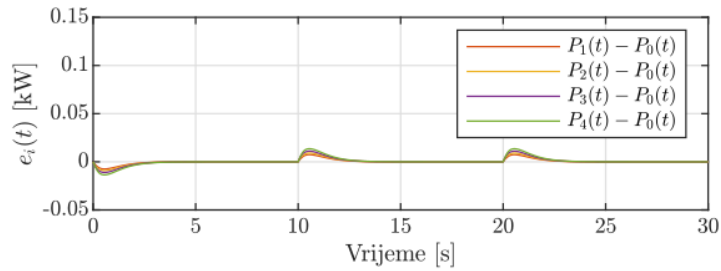


(a) Aktivna snaga.



(b) Reaktivna snaga.

Slika 2.4: Vremenske karakteristike željene ( $P_0(t)$ ,  $Q_0(t)$ ) i stvarne snage ( $P_i(t)$ ,  $Q_i(t)$ ) DDG-ova.



Slika 2.5: Razlika između stvarne i željene snage  $P_i(t) - P_0(t)$ .

## **Glava 3**

# **Kooperativna regulacija izlaza u linear- nim multiagentnim sistemima bez razmjene stanja kontrolera**

U prethodnoj glavi je definisan problem kooperativne regulacije izlaza u heterogenim multiagentnim sistemima, pri čemu su uvedeni distribuirani upravljački protokoli za rješavanje COR-a koji su zasnovani na sintezi distribuiranog opservera. U ovoj glavi će COR problem biti razmotren pod pretpostavkom da stanja kontrolera susjednih agenata nisu dostupna za dizajn lokalnih kontrolera. U tom kontekstu, biće prezentovana dva COR protokola, za introspektivne i neintrospektivne agente, koji se temelje na distribuiranom opserveru i za čiju je implementaciju potrebno da agenti međusobno razmjenjuju samo mjerenja izlaza. Pored toga, biće izložena metodologija za sintezu upravljačkih protokola i izvršena analiza rješivosti COR problema pomoću prezentovanih protokola. Na kraju, treba napomenuti da su glavni doprinosi koji su prezentovani u ovoj glavi publikovani u radu [1].

### **3.1 Uvod**

U literaturi postoje dva različita pristupa za rješavanje COR problema u heterogenim multiagentnim sistemima. Prvi pristup podrazumijeva upotrebu distribuiranog opservera i zasniva se na pretpostavci da matrice u prostoru stanja podsistema zadovoljavaju određeni set jednačina, poznatih kao regulatorске jednačine. U pionirskom radu u ovoj oblasti [22] je predložen upravljački protokol zasnovan na distribuiranom opserveru i sprezi po stanjima agenata, dok je generalizacija ovog protokola u smislu zatvaranja sprege po izlazu podsistema

izvršena u [23]. Drugi pristup za rješavanje COR-a se oslanja na princip unutrašnjeg modela (eng. *internal model principle*, IMP), što ga čini robusnijim na varijacije parametara objekta upravljanja, ali je potrebno da matrice u prostoru stanja podsistema zadovoljavaju takozvani *transmission-zero* uslov [53]. Oba pristupa rješavanju COR-a su privukla značajnu pažnju istraživača prethodnih godina. U radu [54], autori su analizirali problem globalne regulacije izlaza pod pretpostavkom da komunikacioni kanali imaju ograničen propusni opseg. COR problem na vremenski-promjenljivim grafovima sa kašnjenjima u komunikaciji je razmotren u [27,55,56], dok su adaptivni COR protokoli, koji nalaze primjenu u scenarijima kada model lidera nije poznat svim pratiocima, razvijeni u [44,57].

Svi rezultati u oblasti kooperativnog upravljanja multiagentnim sistemima mogu se podijeliti u dvije grupe u zavisnosti od tipa informacija koje su dostupne agentima u mreži. Konkretno, ukoliko su agentima dostupna mjerenja sopstvenog stanja ili izlaza, tada takve agente nazivamo introspektivnim. U ovom slučaju, mogućnosti za manipulaciju interne dinamike agenata su velike, i mogu biti primijenjene različite šeme upravljanja. U radovima [22, 27, 44, 53, 56, 57] je izvršena sinteza upravljačkih protokola zasnovanih na sprezi po stanjima, dok su protokoli zasnovani na sprezi po izlazu analizirani u [23, 54, 58]. Za razliku od introspektivnih agenata, neintrospektivnim agentima nisu dostupna mjerenja sopstvenog stanja ili izlaza [59]. Mogućnosti za manipulaciju interne dinamike agenata u ovom slučaju su značajno manje, budući da upravljački zakon svakog podsistema mora biti zasnovan isključivo na relativnim mjerenjima i informacijama koje agent dobija kroz komunikacionu mrežu od ostalih agenata. U [50], autori su predložili protokol zasnovan na opserveru i relativnim mjerenjima sa ciljem postizanja sinhronizacije izlaza u homogenim mrežama. Sa druge strane sinhronizacija izlaza u heterogenim mrežama je analizirana u [59]. COR problem za linearne heterogene neintrospektivne agente je riješen u [60], dok je nelinearnim agentima pažnja posvećena u [61].

Kod većine postojećih konsenzus i COR protokola [22, 23, 27, 44, 54, 55, 57, 62] se podrazumijeva da agenti međusobno vrše razmjenu stanja kontrolera (opservera) putem komunikacione mreže. Ove dodatne informacije se koriste kao ulaz u distribuirani observer i značajno olakšavaju njegovu sintezu. Štaviše, za realizaciju nekih protokola, poput onih predloženih [58–60, 63], neophodno je da agenti vrše i razmjenu mjerenja stanja/izlaza. U posljednjih nekoliko godina, značajni naponi istraživača su usmjereni na razvoj konsenzus i COR protokola koji se zasnivaju isključivo na razmjeni mjerenja izlaza. Ovi protokoli mogu znatno smanjiti komunikaciono opterećenje, budući da je vektor mjerenja izlaza najčešće manjih dimenzija u odnosu na vektor stanja kontrolera [64, 65]. Osim toga, ukoliko agent



može da mjeri relativnu vrijednost izlaza u odnosu na susjedne agente, ovi protokoli se mogu implementirati bez uspostavljanja komunikacije između agenata [66, 67].

Nepoznavanje stanja kontrolera susjednih agenata značajno usložnjava analizu stabilnosti spregnutog sistema, a samim tim i sintezu distribuiranih upravljačkih zakona. Ove poteškoće proizilaze iz činjenice da dinamika distribuiranog opservera postaje spregnuta sa dinamikom agenata heterogenog multiagentnog sistema, zbog čega postupke sinteze distribuiranog opservera i povratne sprege po stanjima nije moguće sprovesti nezavisno jedan od drugog. U radovima [26, 68], autori su razvili *low-gain* tehniku za sintezu distribuiranog opservera u mrežama introspektivnih agenata. Međutim, ovaj metod ne garantuje rješivost COR problema u prisustvu poremećaja, što ograničava njegovu praktičnu upotrebu. Nedavno, u [69] je predložen COR protokol koji se takođe oslanja isključivo na razmjenu mjerenja izlaza, pri čemu je izveden i uslov za stabilnost u kojem figuriše model cjelokupnog multiagentnog sistema. Međutim, u predloženom postupku za određivanje pojačanja, izvedeni uslov za stabilnost se ne koristi eksplicitno. Naime, u predloženom metodu, pojačanja kontrolera i opservera se računaju nezavisno jedna od drugih korišćenjem Rikatijevih jednačina, pri čemu se ovaj proces iterativno ponavlja sve dok se ne pronađu pojačanja za koja je MAS stabilan. Na kraju, važno je napomenuti da su se alati iz  $\mathcal{H}_\infty$  teorije pokazali veoma korisnim za dizajn distribuiranih protokola zasnovanih na principu unutrašnjeg modela (IMP) [25, 70, 71], dok njihova primjena u sintezi protokola zasnovanih na distribuiranom opserveru još nije potpuno istražena.

U mrežama neintrospektivnih agenata, osim stanja egzosistema, distribuiranim putem je potrebno estimirati i stanja podsistema, budući da lokalna mjerenja izlaza nisu dostupna agentima. Iz tog razloga, postupak sinteze distribuiranih opservera bez razmjene stanja kontrolera postaje još izazovniji nego u mrežama introspektivnih agenata. U radovima [64, 65], razmotren je COR problem u mrežama heterogenih agenata sa minimalno-faznom dinamikom i identičnim relativnim stepenom. Problem konsenzusa u homogenim multiagentnim sistemima sa opštom linearnom dinamikom je riješen u [66, 67] uvođenjem lokalnog opservera za estimaciju greške u sinhronizaciji. Heterogenim multiagentnim sistemima sa opštom linearnom dinamikom je pažnja posvećena u [72], međutim, nisu uspostavljene garancije za rješivost COR problema predloženim metodom za dizajn, čak ni za agente sa minimalno-faznom dinamikom.

Prethodna diskusija predstavljala je glavnu motivaciju za istraživanja sprovedena u okviru doktorske disertacije. Kao rezultat istraživanja, predloženi su novi COR distribuirani upravljački protokoli za heterogene linearne multiagentne sisteme koji se zasnivaju na di-

istribuiranom opserveru i u kojima je eliminisana potreba za razmjenom stanja kontrolera između agenata. Za razliku od većine radova u literaturi koji se isključivo bave mrežama neintrospektivnih ili mrežama introspektivnih agenata, u sprovedenim istraživanjima su obje vrste multiagentnih sistema analizirane u jedinstvenom teorijskom okviru zasnovanom na konceptima iz  $\mathcal{H}_\infty$  teorije. Biće izvršena opsežna analiza rješivosti COR problema iz perspektive dinamike agenata, kao i perspektive dinamike egzosistema. Pod pretpostavkom da se polovi egzosistema nalaze na imaginarnoj osi, biće dokazano da se rješivost COR problema unaprijed može garantovati za: i) introspektivne agente sa opštom linearnom dinamikom, ii) neintrospektivne agente koji su stabilni u otvorenoj sprezi.

U nastavku su navedene ključne prednosti predloženog metoda u poređenju s postojećim metodama.

1. Za razliku od upravljačkih protokola [22, 23, 27, 44, 54, 55, 57–60, 62] koji su takođe zasnovani na distribuiranom opserveru, kod predloženog metoda se ne zahtijeva razmjena stanja kontrolera između agenata. Umjesto toga, neophodno je agenti samo razmjenjuju informacije o izmjerenim izlazima, čime se značajno smanjuje komunikaciono opterećenje. Štaviše, ukoliko agenti koriste senzore za mjerenje relativnih izlaza u odnosu na susjedne agente, predloženi protokoli se mogu implementirati bez uspostavljanja komunikacione mreže. Ovaj aspekt je takođe značajan sa stanovišta sajber bezbjednosti [66].
2. Razvijeni metod za sintezu parametara kontrolera se zasniva na parametarskim algebarskim Rikatičevim jednačinama (eng. *algebraic Riccati equations*, ARE) i konceptima iz  $\mathcal{H}_\infty$  teorije. U poređenju sa *low-gain* postupkom [26, 68], predloženi metod pruža značajno veću fleksibilnost pri dizajniranju parametara kontrolera, pa samim tim omogućava i bolje podešavanje performansi sistema. Štaviše, pokazano je da se rješivost COR problema može garantovati za introspektivne linearne agente sa opštom dinamikom u prisustvu poremećaja, čime su unaprijeđeni rezultati iz [26, 68]. Na kraju, za razliku od [69], izvedeni uslov za stabilnost zavisi isključivo od dinamike pojedinačnog agenta, što ga čini upotrebljivim u samom postupku sinteze kontrolera.
3. Pored protokola za mreže introspektivnih agenata, predložen je i COR protokol za mreže neintrospektivnih agenata. Za razliku od protokola [66, 67], koji su osmišljeni za homogene agente, predloženi protokol se može primijeniti i na mreže heterogenih agenata sa opštom linearnom dinamikom. Štaviše, rješivost COR problema je zagarantovana za agente čiji polovi leže u zatvorenoj lijevoj poluravni kompleksne ravni, što

pruža mogućnost šire primjene u odnosu na rezultate iz [64, 65], gdje je pretpostavljeno da su heterogeni agenti minimalno-fazni i istog relativnog stepena.

## 3.2 Osnovni pojmovi i postavka problema

Posmatrajmo MAS koji se sastoji od  $N$  linearnih heterogenih agenata opisanih jednačinama

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A_i x_i + B_i u_i + E_i d \\ y_i &= C_i x_i + Q d, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.1)$$

gdje su  $x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $u_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$  i  $y_i(t) \in \mathbb{R}^p$  stanje, ulaz i izlaz<sup>1</sup>  $i$ -tog agenta, respektivno, dok  $d(t) \in \mathbb{R}^{q_d}$  predstavlja eksterni poremećaj. Smatraćemo da egzosistem  $\Sigma_d$  generiše poremećaj na sljedeći način:

$$\Sigma_d : \dot{d} = D d, \quad (3.2)$$

gdje je  $D$  konstantna matrica odgovarajućih dimenzija. Dalje, smatraćemo da egzosistem  $\Sigma_\zeta$  generiše referentni signal  $y_0(t)$ :

$$\Sigma_\zeta : \begin{cases} \dot{\zeta} = S \zeta \\ y_0 = R \zeta, \end{cases} \quad (3.3)$$

gdje je  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{q_\zeta}$  stanje, dok je  $y_0(t) \in \mathbb{R}^p$  izlaz egzosistema  $\Sigma_\zeta$ . Regulisani izlaz se definiše kao razlika izlaza podsistema i referentnog signala:

$$\tilde{y}_i = y_i - y_0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Cilj je da se izvrši sinteza distribuiranog upravljačkog protokola koji obezbjeđuje asimptotsku konvergenciju regulisanog izlaza ka nuli, tj. potrebno je da  $\tilde{y}_i(t) \rightarrow 0$  kada  $t \rightarrow \infty$ .

Agenti multiagentnog sistema (3.1) imaju ulogu pratilaca, dok egzosistem (3.3) ima ulogu lidera, pri čemu samo neki pratioci imaju pristup referentnoj trajektoriji egzosistema. Pratioci i lider se modeluju skupom čvorova  $\mathcal{V} = \{0, 1, \dots, N\}$ , pri čemu se čvorovi indeksiraju tako da čvor 0 odgovara lideru. Interakcije između agenata se modeluju skupom grana  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ . Skup svih susjeda čvora  $i$  se označava sa  $\mathcal{N}_i$ . Usmjerenom grafu  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  se pridružuje matrica susjedstva  $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ , gdje je  $a_{ij} > 0$  ako je  $(j, i) \in \mathcal{E}$  i  $a_{ij} = 0$  u suprotnom. Bez gubitka opštosti, smatraćemo da je  $\sum_{j=0}^N a_{ij} = 1$ , za  $i = 0, 1, \dots, N$ , što znači da će za matricu Laplasijana  $\mathcal{L} = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$  važiti relacija  $\mathcal{L} = I - \mathcal{A}$ . Na kraju,

<sup>1</sup>U ovoj glavi ćemo smatrati da je mjereni izlaz istovremeno i upravljani izlaz, pa ćemo ga nazivati samo izlaz.

potrebno je još uvesti sljedeće particije matrice susjedstva i matrice Laplasijana:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_0 & \bar{\mathcal{A}} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a_0 & \bar{\mathcal{L}} \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

pri čemu je  $a_0 = [a_{10}, a_{20}, \dots, a_{N0}]^T$ .

Zavisno od tipa agenata, biće razmotrene dvije vrste protokola: za neintrospektivne i introspektivne agente. Neintrospektivni agenti mogu da mjere relativnu vrijednost izlaza u odnosu na susjedne agente, pa ćemo u njihovom slučaju smatrati da je za sintezu kontrolera dostupna samo relativna informacija  $\eta_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(y_i - y_j) = \sum_{j=0}^N l_{ij}y_j$ . Distribuirani dinamički protokol koji se zasniva na upotrebi  $\eta_i$  nazvaćemo ROF (eng. *relative output feedback*) protokolom. Važno je napomenuti da se ROF protokol može implementirati bez uspostavljanja komunikacije između agenata. S druge strane, introspektivni agenti mogu da mjere sopstveni izlaz u apsolutnim (globalnim) koordinatama, te ćemo smatrati da su za sintezu kontrolera dostupne informacije  $y_i$  i  $\eta_i$ . U ovom slučaju razlikujemo dva scenarija implementacije. U prvom scenariju agenti razmjenjuju vrijednosti o sopstvenom izlazu sa susjednim agentima putem komunikacione mreže, dok su u drugom scenariju agenti pored apsolutnih mogu vršiti i relativna mjerenja, čime bi se eliminisala potreba za komunikacijom. Upravljački zakon za introspektivne agente, koji pokriva oba scenarija implementacije, će biti nazvan OF (eng. *output feedback*) protokolom.

Imajući u vidu prethodnu diskusiju, problem kooperativne regulacije izlaza u multiagentnim sistema se može formalizovati na sljedeći način.

**Problem (COR):** Za multiagentni sistem (3.1)-(3.3), dizajnirati ROF (OF) kontroler tako da spregnuti sistem zadovoljava sljedeće uslove:

1. Za  $d = 0$  i  $\zeta = 0$ , ekvilibrijum spregnutog sistema je asimptotski stabilan.
2. Za proizvoljne početne uslove  $x_i(0)$ ,  $d(0)$  i  $\zeta(0)$ , signal greške asimptotski konvergira ka nuli, tj.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{y}_i(t) = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Da bi riješili COR problem, potrebno je usvojiti sljedeće pretpostavke:

**Pretpostavka 3.1.** Usmjereni graf  $\mathcal{G}$  sadrži usmjereno razapinjuće stablo sa čvorom 0 kao korijenom.

**Pretpostavka 3.2.** Matrica  $S$  nema striktno stabilnih polova, tj.  $\lambda(S) \in \bar{\mathbb{C}}^+$ .

**Pretpostavka 3.3.** Parovi  $(A_i, B_i)$ , za  $i = 1, \dots, N$ , su stabilizabilni.

**Pretpostavka 3.4.1.** (ROF protokol) Parovi

$$\left( [-C_i \ -Q \ R], \begin{bmatrix} A_i & E_i & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix} \right), \quad i = 1, \dots, N,$$

su detektabilni.

**Pretpostavka 3.4.2.** (OF protokol) Parovi

$$(R, S), \left( [C_i \ Q], \begin{bmatrix} A_i & E_i \\ 0 & D \end{bmatrix} \right), \quad i = 1, \dots, N,$$

su detektabilni.

**Pretpostavka 3.5.** Linearne matrične jednačine

$$\begin{cases} \Pi_i^d D = A_i \Pi_i^d + B_i \Gamma_i^d + E_i \\ 0 = C_i \Pi_i^d + Q, \end{cases} \quad (3.5a)$$

$$\begin{cases} \Pi_i^\zeta S = A_i \Pi_i^\zeta + B_i \Gamma_i^\zeta \\ 0 = C_i \Pi_i^\zeta - R, \end{cases} \quad (3.5b)$$

imaju rješenja  $(\Pi_i^d, \Gamma_i^d)$  i  $(\Pi_i^\zeta, \Gamma_i^\zeta)$ , respektivno, za  $i = 1, \dots, N$ .

**Primjedba 3.1.** Pretpostavka 3.2 se usvaja kako bi se izbjegao trivijalan slučaj kada je matrica  $S$  Hurwitz stabilna, budući da modovi koji odgovaraju sopstvenim vrijednostima sa negativnim realnim dijelom eksponencijalno konvergiraju ka nuli i ne utiču na odziv spregnutog sistema u stacionarnom stanju. Samim tim, ako je COR problem rješiv za linearni MAS kada važi Pretpostavka 3.2, onda će sigurno biti rješiv i kada ova pretpostavka nije zadovoljena [73]. Pretpostavke 3.3-3.5 su standardne pretpostavke u radovima koji se bave kooperativnom regulacijom izlaza [3, 22]. Naime, rješivost regulatorskih jednačina (3.5) je potreban uslov za rješavanje klasičnog problema regulacije izlaza [73]. U slučaju OF protokola, ispunjenost Pretpostavke 3.4.2 se može obezbijediti pod blagim uslovima ukoliko su parovi  $(C_i, A_i)$  i  $(Q, D)$  detektabilni. Pored toga, ukoliko poremećaj ne djeluje na izlaz sistema (tj.  $Q = 0$ ), Pretpostavka 3.4.2 se svodi na detektabilnost para  $\left( [C_i \ 0], \begin{bmatrix} A_i & E_i \\ 0 & D \end{bmatrix} \right)$ , koji je uvijek detektabilan ukoliko su parovi  $(C_i, A_i)$  i  $(E_i, A_i)$  detektabilni [74]. U slučaju ROF protokola, Pretpostavka 3.4.1 je uvijek zadovoljena ukoliko su parovi  $\left( [C_i \ 0], \begin{bmatrix} A_i & E_i \\ 0 & D \end{bmatrix} \right)$  i  $(R, S)$  detektabilni i ako matrice  $S$  i  $D$  nemaju zajedničkih sopstvenih vrijednosti. Ukoliko  $S$  i  $D$  imaju zajedničkih sopstvenih vrijednosti, Pretpostavka 3.4.1 neće biti ispunjena za agente sa jednim izlazom, dok za agente sa više izlaza može biti ispunjena pod blagim uslovima [75].

**Primjedba 3.2.** Važno je napomenuti da se egzosistemi koji generišu poremećaj i referentni signal tretiraju nezavisno jedan od drugog. Sličan pristup je usvojen u radovima [55, 58, 69]. Dalje, smatraće se da poremećaj  $d$  nije dostupan za mjerenje nijednom agentu u mreži, dok je referentni signal  $y_0$  dostupan bar jednom agentu. Međutim, kao što je već pomenuto u Primjedbi 3.1, u slučaju kada agenti imaju jedan izlaz, a matrice stanja egzosistema  $S$  i  $D$  imaju zajedničke sopstvene vrijednosti, Pretpostavka 3.4.1 neće biti ispunjena. Jedan način da se prevaziđe ovaj problem je da se iz matrice  $D$  uklone zajedničke sopstvene vrijednosti [69]. Alternativni pristup bi bio modelovanje poremećaja i referentnog sistema pomoću jednog zajedničkog egzosistema [22, 23, 53, 54]. U ovom slučaju, bar jedan agent bi morao imati pristup cjelokupnom stanju egzosistema, uključujući i poremećaje. Na kraju, treba napomenuti da su svi rezultati dobijeni za ROF protokol primjenljivi i na ovaj scenario. Međutim, radi lakšeg uspostavljanja paralele između ROF i OF protokola, usvojen je isti način modelovanja egzosistema za obje vrste agenata.

U sljedećoj lemi prezentovani su rezultati koji se odnose na spektralni radijus matrice  $|\mu I - \tilde{L}|$ , gdje je  $\mu \in \mathbb{R}$  proizvoljni skalar. Ova matrica ima važnu ulogu u analizi stabilnosti multiagentnog sistema.

**Lema 3.1.** *Neka je izvršena particija matrice susjedstva i matrice Laplasijana kao u izrazu (3.4). Tada, za bilo koji parametar  $\mu \in \mathbb{R}$  važi jednakost  $\rho(|\mu I - \tilde{L}|) = |\mu - 1| + \rho(\tilde{\mathcal{A}})$ . Štaviše, nejednakost  $\rho(\tilde{\mathcal{A}}) < 1$  je zadovoljena ako i samo ako usmjereni graf  $\mathcal{G}$ , kojem odgovara matrica susjedstva  $\mathcal{A}$ , sadrži razapinjuće stablo sa čvorom 0 kao korijenom stabla.*

*Dokaz.* U cilju dokazivanja prvog tvrđenja, potrebno je krenuti od identiteta  $\tilde{L} = I - \tilde{\mathcal{A}}$ . Budući da je  $\tilde{\mathcal{A}}$  nenegativna matrica sa nulama na glavnoj dijagonali, lako se može pokazati da je  $|\mu I - \tilde{L}| = |\mu - 1|I + \tilde{\mathcal{A}}$ . Samim tim, važe jednakosti  $\lambda_i(|\mu I - \tilde{L}|) = \lambda_i(|\mu - 1|I + \tilde{\mathcal{A}}) = |\mu - 1| + \lambda_i(\tilde{\mathcal{A}})$ , za  $i = 1, \dots, N$ . Na osnovu Peron-Frobenijusove teoreme, iz nenegativnosti matrice  $\tilde{\mathcal{A}}$  slijedi da je  $\rho(\tilde{\mathcal{A}})$  njena sopstvena vrijednost, što dalje implicira da je  $\rho(|\mu I - \tilde{L}|) = |\mu - 1| + \rho(\tilde{\mathcal{A}})$ .

Za dokaz drugog tvrđenja potrebno je uočiti da iz strukture matrice  $\mathcal{A}$  slijedi da je  $\lambda(\mathcal{A}) = \lambda(\tilde{\mathcal{A}}) \cup 1$ . Matrica  $\mathcal{A}$  je desno stohastička, što znači da ima prostu sopstvenu vrijednost  $\rho(\mathcal{A}) = 1$  ako i samo ako usmjereni graf  $\mathcal{G}$  sadrži razapinjuće stablo sa čvorom 0 kao korijenom [16]. Iz prethodnog slijedi da je  $\rho(\tilde{\mathcal{A}}) < 1$ .  $\square$

### 3.3 COR u mrežama neintrospektivnih agenata

U ovom poglavlju će prvo biti prezentovan distribuirani ROF kontroler za rješavanje COR problema. Nakon toga će biti izvršena analiza stabilnosti i biće prezentovan metod za dizajn parametara kontrolera.

Posmatrajmo ROF kontroler koji ima sljedeći oblik:

$$\begin{aligned} \begin{matrix} 15 \\ \begin{bmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{d}_i \\ \hat{\zeta}_i \end{bmatrix} \end{matrix} &= \begin{bmatrix} A_i & E_i & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{d}_i \\ \hat{\zeta}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} L_i^x \\ L_i^d \\ L_i^\zeta \end{bmatrix} \varepsilon_i, \\ 8 \\ u_i &= K_i^x \hat{x}_i + K_i^d \hat{d}_i + K_i^\zeta \hat{\zeta}_i, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.6)$$

gdje vektori  $\hat{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $\hat{d}_i \in \mathbb{R}^{q_d}$  i  $\hat{\zeta}_i \in \mathbb{R}^{q_\zeta}$  predstavljaju estimacije promjenljivih  $x_i$ ,  $d$  i  $\zeta$ , respektivno. Promjenljiva  $\varepsilon_i \in \mathbb{R}^p$  predstavlja virtuelnu grešku koja se definiše na sljedeći način

$$\varepsilon_i = \sum_{j=0}^N l_{ij} y_j - \mu (C_i \hat{x}_i + Q \hat{d}_i - R \hat{\zeta}_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.7)$$

gdje je parametar  $\mu$  realni skalar. Može se uočiti da se upravljački zakon (3.6) sastoji od distribuiranog opservera stanja agenta i egzosistema  $\Sigma_d$  i  $\Sigma_\zeta$ , kao i upravljačkog signala  $u_i$ . Pojačanja opservera  $L_i^x$ ,  $L_i^d$ ,  $L_i^\zeta$ , kao i pojačanja u upravljačkom signalu  $K_i^x$ ,  $K_i^d$ ,  $K_i^\zeta$  (pojačanja kontrolera), predstavljaju parametre koje je potrebno odrediti.

**Primjedba 3.3.** Bitno je naglasiti da pored zavisnosti od relativnih mjerenja izlaza, virtuelna greška sadrži i dodatni član  $\mu(C_i \hat{x}_i + Q \hat{d}_i - R \hat{\zeta}_i)$  koji zavisi od lokalnih estimacija stanja agenta i stanja egzosistema. Samim tim, upravljački zakon (3.6) se može implementirati bez uspostavljanja komunikacije između agenata. Ovaj dodatni član je od izuzetne važnosti za stabilizaciju multiagentnog sistema, što će biti pokazano kasnije.

Pod pretpostavkom da će stanja distribuiranog opservera konvergirati ka stvarnim stanjima sistema i egzistema, za vrijednosti pojačanja  $K_i^d$  i  $K_i^\zeta$  ćemo usvojiti sljedeće izraze:

$$K_i^d = \Gamma_i^d - K_i^x \Pi_i^d, \quad K_i^\zeta = \Gamma_i^\zeta - K_i^x \Pi_i^\zeta. \quad (3.8)$$

Definišimo odstupanje trenutne vrijednosti vektora stanja  $x_i$  od njegove vrijednosti u stacionarnom stanju izrazom  $e_i = x_i - \Pi_i^d d - \Pi_i^\zeta \zeta$ . Dalje, neka su odgovarajuće greške u estimaciji date izrazima  $\tilde{x}_i = \hat{x}_i - x_i$ ,  $\tilde{d}_i = \hat{d}_i - d$  i  $\tilde{\zeta}_i = \hat{\zeta}_i - \zeta$ . Uzimajući u obzir regulatorske jednačine

(3.5), dinamika agenata se u novim koordinatama može zapisati na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_i \\ \dot{\tilde{x}}_i \\ \dot{\tilde{d}}_i \\ \dot{\tilde{\zeta}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i + B_i K_i^x & B_i K_i^x & B_i K_i^d & B_i K_i^\zeta \\ 0 & A_i & E_i & 0 \\ 0 & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_i \\ \tilde{x}_i \\ \tilde{d}_i \\ \tilde{\zeta}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ L_i^x \\ L_i^d \\ L_i^\zeta \end{bmatrix} \varepsilon_i.$$

Ako se uvedu promjenljive  $\tilde{e}_i = \begin{bmatrix} \tilde{x}_i^T & \tilde{d}_i^T & \tilde{\zeta}_i^T \end{bmatrix}^T$  i  $\xi_i = \sum_{j=1}^N l_{ij} C_j e_j - \mu C_i e_i$ , virtualna greška  $\varepsilon_i$  se može predstaviti izrazom  $\varepsilon_i = \xi_i + \mu \begin{bmatrix} -C_i & -Q & R \end{bmatrix} \tilde{e}_i$ . Dalje, uvođenjem matrica:

$$H_i = \begin{bmatrix} A_i & E_i & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix}, \quad G_i = \begin{bmatrix} -C_i & -Q & R \end{bmatrix},$$

$$K_i = \begin{bmatrix} K_i^x & K_i^d & K_i^\zeta \end{bmatrix}, \quad L_i = \begin{bmatrix} L_i^x \\ L_i^d \\ L_i^\zeta \end{bmatrix},$$

dinamika spregnutog sistema se svodi na oblik

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_i \\ \dot{\tilde{e}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i + B_i K_i^x & B_i K_i \\ 0 & H_i + \mu L_i G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_i \\ \tilde{e}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ L_i \end{bmatrix} \xi_i.$$

Da bi multiagentni sistem zapisali u kompaktnoj formi, korist ćemo sljedeću notaciju:

$$\begin{aligned} \phi &= \text{col} \{ \phi_i \}, \quad (\phi_i = e_i, \tilde{e}_i, \xi_i) \\ \Phi &= \text{diag} \{ \Phi_i \}, \quad (\Phi_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i & C_i & H_i & G_i & K_i^x & K_i & L_i \end{bmatrix}) \\ \tilde{\mathcal{L}} &= \tilde{\mathcal{L}} \otimes I_p. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Dinamika spregnutog multiagentnog sistema se onda može zapisati u obliku  $\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\tilde{e}} \end{bmatrix} = A_{CL} \begin{bmatrix} e \\ \tilde{e} \end{bmatrix}$ , pri čemu je matrica  $A_{CL}$  jednaka:

$$A_{CL} = \begin{bmatrix} A + BK^x & BK \\ \tilde{L}(\tilde{\mathcal{L}} - \mu I)C & H + \mu LG \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Uzimajući u obzir regulatorske jednačine (3.5b), lako se pokazuje da važi  $\dot{y}_i = C_i x_i +$



$Qd - R\zeta = C_i e_i$ , odakle se može zaključiti da  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0$  implicira  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{y}_i(t) = 0$ . Samim tim, dolazimo do zaključka da je obezbjeđivanje stabilnosti matrice  $A_{CL}$  ekvivalentno rješavanju COR problema.

### 3.3.1 Analiza stabilnosti

U ovom potpoglavlju će biti izveden lokalni uslov za stabilnost koji, kada je zadovoljen za sve agente u mreži, garantuje stabilnost matrice  $A_{CL}$ .

Najprije uvedimo matrice

$$\hat{A}_i = \begin{bmatrix} A_i + B_i K_i^x & B_i K_i \\ 0 & H_i + \mu L_i G_i \end{bmatrix}, \hat{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ L_i \end{bmatrix}, \hat{C}_i = \begin{bmatrix} C_i & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

i funkciju prenosa

$$T_i(s) = \hat{C}_i (sI - \hat{A}_i)^{-1} \hat{B}_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.12)$$

Sada možemo dati sljedeću teoremu.

**Teorema 3.1.** *Neka važe Pretpostavke 3.1-3.4.1 i 3.5. Tada, ROF protokol (3.6) rješava problem kooperativne regulacije izlaza u multiagentnom sistemu (3.1)-(3.3) ukoliko je zadovoljen sljedeći uslov:*

$$\|T_i\|_\infty < \gamma^*, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.13)$$

pri čemu je  $\gamma^* = \frac{1}{\rho(\mu I - \tilde{L})}$ .

*Dokaz.* Matrica stanja spregnutog sistema  $A_{CL}$  se može zapisati u obliku  $A_{CL} = \hat{A} + \hat{B}(\tilde{L} - \mu I)\hat{C}$ , gdje je

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A + BK^x & BK \\ 0 & H + \mu LG \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix}, \hat{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Pretpostavimo da je  $\hat{A}$  Hurwitz stabilna matrica, što je uvijek moguće obezbijediti odgovarajućim odabirom pojačanja  $K^x$  i  $L$  ako važe Pretpostavke 3.3 i 3.4.1. Tada, na osnovu *matrix determinant* leme [71] imamo

$$\begin{aligned} \det(sI - A_{CL}) &= \\ \det(sI - \hat{A}) \det(I - (sI - \hat{A})^{-1} \hat{B}(\tilde{L} - \mu I)\hat{C}) &= \\ \det(sI - \hat{A}) \det(I + (\mu I - \tilde{L})\hat{C}(sI - \hat{A})^{-1} \hat{B}). \end{aligned}$$

Budući da je spregnuti MAS stabilan ako važi  $\det(sI - A_{CL}) \neq 0, \forall s \in \bar{\mathbb{C}}^+$ , iz prethodne relacije se može zaključiti da će matrica  $A_{CL}$  biti stabilna ukoliko matrica  $I + (\mu I - \tilde{L})\hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B}$  nema nultih sopstvenih vrijednosti za bilo koje  $s \in \bar{\mathbb{C}}^+$ , jer u suprotnom njena determinanta će biti jednaka nuli. Samim tim, matrica  $A_{CL}$  će biti Hurwitz stabilna ukoliko važi uslov

$$\sup_{s \in \bar{\mathbb{C}}^+} \rho((I - \tilde{L})\hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B}) < 1. \quad (3.15)$$

Uzimajući u obzir matrice (3.11) i (3.14), funkciju prenosa  $\hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B}$  možemo zapisati u sljedećem obliku

$$\begin{aligned} \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B} &= \\ C(sI - (A + BK^x))^{-1}BK(sI - (H + \mu LG))^{-1}L &= \\ \text{diag}(C_i(sI - (A_i + B_i K_i^x))^{-1}B_i K_i (sI - (H_i + \mu L_i G_i))^{-1}L_i) &= \\ \text{diag}(T_i(s)). \end{aligned}$$

Na osnovu *block-norm matrix* nejednakosti [70] dalje dobijamo

$$\rho((\mu I - \tilde{L})\text{diag}(T_i(s))) \leq \rho(|\mu I - \tilde{L}|\text{diag}(\|T_i\|_\infty)).$$

Primjenom Leme 8 iz [70] lako se može pokazati da važi nejednakost  $\rho((\mu I - \tilde{L})\text{diag}(\|T_i\|_\infty)) \leq \rho(|\mu I - \tilde{L}|) \max_i \|T_i\|_\infty$ , odakle se konačno dobija sljedeći uslov stabilnosti

$$\rho(|\mu I - \tilde{L}|) \max_i \|T_i\|_\infty < 1.$$

Ovaj uslov je ekvivalentan uslovu (3.13), čime se kompletira dokaz teoreme.  $\square$

U narednoj lemi izvedena je donja granica za  $\mathcal{H}_\infty$  normu  $\|T_i\|_\infty$ .

**Lema 3.2.** *Neka je funkcija prenosa  $T_i(s)$  stabilna. Tada je  $\mu^{-1}$  donja granica  $\mathcal{H}_\infty$  norme  $\|T_i\|_\infty$ , tj.*

$$\|T_i\|_\infty \geq \mu^{-1}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.16)$$

*Dokaz.* Uvedimo sljedeću transformacionu matricu

$$M_i = \begin{bmatrix} I & I & -\Pi_i^d & -\Pi_i^z \\ 0 & I & -\Pi_i^d & -\Pi_i^z \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Uzimajući u obzir relacije (3.8), matrice definisane u izrazu (3.11) će u novom koordinatnom sistemu biti jednake  $\check{A}_i = M_i \hat{A}_i M_i^{-1}$ ,  $\check{B}_i = M_i \hat{B}_i$  i  $\check{C}_i = \hat{C}_i M_i^{-1}$ , odnosno:

$$\check{A}_i = \begin{bmatrix} A_i + B_i K_i^x & -\mu \begin{bmatrix} I & -\Pi_i^d & -\Pi_i^\zeta \end{bmatrix} L_i C_i & 0 & 0 \\ 0 & A_i - \mu \begin{bmatrix} I & -\Pi_i^d & -\Pi_i^\zeta \end{bmatrix} L_i C_i & -B_i \Gamma_i^d & -B_i \Gamma_i^\zeta \\ 0 & -\mu L_i^d C_i & D & 0 \\ 0 & -\mu L_i^\zeta C_i & 0 & S \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

$$\check{B}_i = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\Pi_i^d & -\Pi_i^\zeta \end{bmatrix} L_i \\ \begin{bmatrix} I & -\Pi_i^d & -\Pi_i^\zeta \end{bmatrix} L_i \\ L_i^d \\ L_i^\zeta \end{bmatrix}, \quad \check{C}_i = \begin{bmatrix} C_i & -C_i & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pretpostavimo da važi nejednakost  $\|T_i\|_\infty < \mu^{-1}$ . Tada se na osnovu teoreme malog pojačanja sistem (3.17) može stabilizovati upravljачkim zakonom  $\check{u}_i = -\mu \check{y}_i$ . Rezultujuća matrica stanja je u tom slučaju jednaka

$$\check{A}_i - \mu \check{B}_i \check{C}_i = \begin{bmatrix} A_i + B_i K_i^x - \mu \begin{bmatrix} I & -\Pi_i^d & -\Pi_i^\zeta \end{bmatrix} L_i C_i & 0 & 0 & 0 \\ -\mu \begin{bmatrix} I & -\Pi_i^d & -\Pi_i^\zeta \end{bmatrix} L_i C_i & A_i & -B_i \Gamma_i^d & -B_i \Gamma_i^\zeta \\ -\mu L_i^d C_i & 0 & D & 0 \\ -\mu L_i^\zeta C_i & 0 & 0 & S \end{bmatrix}.$$

Međutim, iz strukture ove matrice slijedi da je  $\lambda(\check{A}_i - \mu \check{B}_i \check{C}_i) = \lambda(A_i) \cup \lambda(D) \cup \lambda(S) \cup \lambda(A_i + B_i K_i^x - \mu(L_i^x - \Pi_i^d L_i^d - \Pi_i^\zeta L_i^\zeta)C_i)$ , odakle se može zaključiti da je nemoguće stabilizovati sistem upravljачkim zakonom  $\check{u}_i = -\mu \check{y}_i$ , jer je  $\lambda(S) \in \bar{\mathbb{C}}^+$ . Iz ove kontradikcije slijedi da važi nejednakost (3.16).  $\square$

U Primjedbi 3.1 je komentarisana opravdanost Pretpostavki 3.2-3.5, dok je u nastavku opravdana potreba za Pretpostavkom 3.1.

**Posljedica 3.1.** Lokalni uslov stabilnosti (3.13) je moguće zadovoljiti ako i samo ako važe Pretpostavka 3.1 i uslov

$$\mu > \frac{1 + \rho(\bar{A})}{2}. \quad (3.18)$$

*Dokaz.* Da bi bilo moguće zadovoljiti uslov stabilnosti (3.13), jasno je da parametar  $\gamma^*$  mora

biti veći od donje granice norme  $\|T_i\|_\infty$ , tj. mora važiti

$$\rho(|\mu I - \bar{L}|) < \mu. \quad (3.19)$$

*Ako dio:* Ukoliko važi Pretpostavka 3.1, iz Leme 3.1 slijedi da je  $\rho(|\mu I - \bar{L}|) = |\mu - 1| + \rho(\bar{A})$  i  $\rho(\bar{A}) < 1$ . Samim tim, izraz (3.19) se može zapisati na sljedeći način  $|\mu - 1| + \rho(\bar{A}) < \mu$ . Lako se može zaključiti da ova nejednakost važi za bilo koje  $\mu$  koje zadovoljava uslov (3.18).

*Samo ako dio:* Pretpostavimo da ne važi Pretpostavka 3.1. Tada, iz Leme 3.1 slijedi da je  $\rho(\bar{A}) = 1$ . Samim tim, važi  $\rho(|\mu I - \bar{L}|) = |\mu - 1| + 1$ , što je uvijek veće ili jednako  $\mu$ .  $\square$

### 3.3.2 Sinteza kontrolera

U opštem slučaju, nije jednostavno odrediti pojačanja  $K_i$  i  $L_i$  tako da uslov  $\|T_i\|_\infty < \gamma^*$  bude zadovoljen. Glavne poteškoće proizilaze iz činjenice da je matrica pojačanja  $L_i$  inkorporirana u matricama stanja i ulaza sistema, što onemogućava primjenu poznatih  $\mathcal{H}_\infty$  metoda za dizajn. Iz tog razloga je potrebno prvo izračunati pojačanje  $L_i$  na takav način da matrica  $H_i + \mu L_i G_i$  bude Hurwitz stabilna. Takvo pojačanje uvijek postoji, budući da je par  $(G_i, H_i)$  detektabilan (Pretpostavka 3.4.1). Nakon što se izračuna pojačanje  $L_i$ , u drugom koraku je potrebno odrediti pojačanje  $K_i^x$  tako da uslov (3.13) bude zadovoljen. Preostala pojačanja kontrolera mogu se odrediti na osnovu relacija (3.8).

Postoji više načina da se odredi pojačanje  $L_i$  tako da matrica  $H_i + \mu L_i G_i$  bude Hurwitz stabilna. U [1] je predloženo da se prvo riješi sljedeća parametarska Rikatijska jednačina:

$$X_i(\epsilon_i)H_i^T + H_i X_i(\epsilon_i) - \delta_i X_i(\epsilon_i)G_i^T G_i X_i(\epsilon_i) + \epsilon_i I = 0, \quad (3.20)$$

gdje je  $\delta_i$  mala pozitivna konstanta, dok je  $\epsilon_i > 0$  parametar koji je moguće podešavati. Nakon računanja matrice  $X_i(\epsilon_i)$  na osnovu jednačine (3.20), pojačanje  $L_i$  se dobija na osnovu relacije  $L_i = -\mu^{-1} X_i(\epsilon_i)G_i^T$ .

Nakon što se odredi pojačanje  $L_i$  po prethodno opisanom postupku, u drugom koraku je potrebno odrediti odgovarajuće pojačanje  $K_i^x$ . Problem pronalaženja pojačanja  $K_i^x$  se može preformulisati u standardni  $\mathcal{H}_\infty$  static output feedback (SOF) problem. Naime, matrica stanja

$\hat{A}_i$  se može zapisati u obliku  $A_i = \bar{A}_i + \bar{B}_i K_i^x \bar{C}_i$ , gdje je

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & \begin{bmatrix} 0 & B_i \Gamma_i^d & B_i \Gamma_i^\zeta \end{bmatrix} \\ \mathbf{0} & H_i + \mu L_i G_i \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

$$\bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_i = \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} I & -\Pi_i^d & -\Pi_i^\zeta \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Pojačanje  $K_i^x$  se određuje tako da funkcija prenosa  $T_i(s) = \hat{C}_i(sI - \bar{A}_i - \bar{B}_i K_i^x \bar{C}_i)^{-1} \hat{B}_i$  bude stabilna i da važi uslov  $\|T_i\|_\infty < \gamma_i$ , za  $i = 1, \dots, N$ . Pomoćni parametar  $\gamma_i \leq \gamma^*$  se uvodi kako bi se obezbijedila dodatna sloboda pri podešavanju gornje vrijednosti  $\|T_i\|_\infty$ . Da bi  $\mathcal{H}_\infty$  SOF problem bio rješiv potrebno je da važi Pretpostavka 3.3.

U literaturi je dostupan veliki broj algoritama za rješavanje  $\mathcal{H}_\infty$  SOF problema [76–78]. U [78] je predložen iterativni LMI (ILMI) metod, koji sadrži posebnu proceduru za pronalaženje početnih vrijednosti promjenljivih, što ga čini vrlo efektivnim u pronalaženju rješenja. Postupak pronalaženja pojačanja  $K_i^x$  pomoću ILMI metoda je prezentovan u Algoritmu 3.1.

**Primjedba 3.4.** U Algoritmu 3.1 se za određivanje pojačanja  $K_i^x$  koristi uslov (3.13), što upućuje na zaključak da predloženi upravljački zakon nije u potpunosti distribuiran, jer je potrebno poznavati globalnu informaciju  $\gamma^*$ . Zapravo, većina postojećih protokola u literaturi [25, 27, 65, 68, 70, 71] se temelji na poznavanju globalne informacije. Važno je naglasiti da u brojnim praktičnim primjenama donja granica spektralnog radijusa matrice  $|\mu I - \tilde{\mathcal{L}}|$  poznata ili ju je moguće estimirati/predvidjeti. Jedan pristup dizajnu potpuno distribuiranih protokola se zasniva na upotrebi adaptivnih pojačanja [39, 66].

Analiza rješivosti COR problema i neke važne osobine ARE (3.20) biće prezentovane u Poglavlju 3.5. Treba napomenuti da se time što se pojačanje  $L_i$  ne optimizuje, već računa na osnovu ARE (3.20), zapravo umanjuje mogućnost postojanja pojačanja  $K_i^x$  za koje će uslov (3.13) biti zadovoljen. Međutim, biće pokazano da predloženi postupak sinteze ipak može garantovati rješivost COR problema za neke karakteristične modele pratilaca i egzosistema.

Kompletna procedura za određivanje pojačanja  $L_i$  i  $K_i^x$  je sumarizovana u okviru Algoritma 3.2.

---

**Algoritam 3.1**  $\mathcal{H}_\infty$  Static Output Feedback (SOF) algoritam za određivanje pojačanja COR kontrolera

---

- 1: Izvršiti inicijalizaciju  $\mathcal{P}_0 = I$  i  $\mathcal{Q}_0 = I$ .
- 2: Odrediti  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{V}_1$ ,  $\mathcal{V}_2$  rješavanjem sljedećeg optimizacionog problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{trace}(\mathcal{P}\mathcal{Q}_0 - \mathcal{Q}\mathcal{P}_0), \text{ pod uslovima} \\ & \begin{pmatrix} \mathcal{P}\bar{A}_i + \bar{A}_i^T\mathcal{P} + \mathcal{V}_1\bar{C}_i + \bar{C}_i^T\mathcal{V}_1^T & \mathcal{P}\hat{B}_i & \hat{C}_i^T \\ \hat{B}_i^T\mathcal{P} & -\gamma_i I & 0 \\ \hat{C}_i & 0 & -\gamma_i I \end{pmatrix} < 0, \\ & \begin{pmatrix} \bar{A}_i\mathcal{Q} + \mathcal{Q}\bar{A}_i^T + \bar{B}_i\mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_2^T\bar{B}_i^T & \hat{B}_i & \hat{C}_i^T\mathcal{Q} \\ \hat{B}_i^T & -\gamma_i I & 0 \\ \mathcal{Q}\hat{C}_i & 0 & -\gamma_i I \end{pmatrix} < 0, \\ & \begin{pmatrix} \mathcal{P} & 0 \\ 0 & \mathcal{Q} \end{pmatrix} \geq 0, \mathcal{P} > 0, \mathcal{Q} > 0. \end{aligned}$$

- 3: Provjeriti sljedeće uslove:
  1. ako je  $\text{trace}(\mathcal{P}\mathcal{Q}) - n < \varepsilon_1$ , gdje je  $\varepsilon_1$  zadata tolerancija, preći na Korak 4
  2. ako je  $\text{trace}(\mathcal{P}\mathcal{Q}) - \text{trace}(\mathcal{P}_0\mathcal{Q}_0) < \varepsilon_2$ , gdje je  $\varepsilon_2$  zadata tolerancija, matrica  $\mathcal{P}$  nije pronađena, EXIT
  3. u suprotnom, podesiti  $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}$  i preći na Korak 2.
- 4: Podesiti  $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$ . Za zadatu matricu  $\mathcal{P}$ , odrediti  $K_i^x$  rješavanjem sljedećeg optimizacionog problema

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha, \text{ pod uslovom} \\ \Phi = & \mathcal{P}\bar{A}_i + \bar{A}_i^T\mathcal{P} + \mathcal{P}\bar{B}_i K_i^x \bar{C}_i + \bar{C}_i^T K_i^{xT} \bar{B}_i^T \mathcal{P} - \alpha\mathcal{P} \\ & \begin{pmatrix} \Phi & \mathcal{P}\hat{B}_i & \hat{C}_i^T \\ \hat{B}_i^T\mathcal{P} & -\gamma_i I & 0 \\ \hat{C}_i & 0 & -\gamma_i I \end{pmatrix} < 0. \end{aligned}$$

- 5: ako je  $\alpha \leq 0$ , stabilizujuće pojačanje  $K_i^x$  je pronađeno, EXIT
- 6: Za zadatu matricu  $K_i^x$ , odrediti  $\mathcal{P}$  rješavanjem sljedećeg optimizacionog problema:

$$\min \quad \alpha, \text{ pod uslovom iz Koraka 4.}$$

- 7: ako je  $\alpha \leq 0$ , stabilizujuće pojačanje  $K_i^x$  je pronađeno, EXIT
- 8: Za zadatu matricu  $K_i^x$  i parametar  $\alpha$ , odrediti  $\mathcal{P}$  rješavanjem sljedećeg optimizacionog problema:

$$\min \text{trace}(\mathcal{P}) \quad \text{pod uslovom iz Koraka 4.}$$

- 9: Provjeriti sljedeće uslove:
    1. ako je  $\|\mathcal{P} - \mathcal{P}_0\| / \|\mathcal{P}\| < \delta$ , rješenje nije pronađeno, EXIT
    2. u suprotnom, vratiti se na Korak 4
-

---

**Algoritam 3.2** Sinteza ROF kontrolera

---

- 1: Usvojiti vrijednost parametra  $\mu$  tako da je zadovoljen uslov (3.18). Inicijalizovati parametre  $\epsilon_i$  i  $\delta_i$ .
- 2: Izračunati  $L_i = -\mu^{-1}X_i(\epsilon_i)G_i^T$ , gdje je matrica  $X_i(\epsilon_i)$  rješenje sljedeće ARE:

$$X_i(\epsilon_i)H_i^T + H_iX_i(\epsilon_i) - \delta_iX_i(\epsilon_i)G_i^TG_iX_i(\epsilon_i) + \epsilon_iI = 0. \quad (3.22)$$

- 3: Odrediti pojačanje  $K_i^x$  pomoću Algoritma 3.1.
  - 4: Ukoliko Algoritam 3.1 ne daje stabilizujuće rješenje, vratiti se na Korak 1 i smanjiti vrijednost parametra  $\epsilon_i$ . Ukoliko Algoritam 3.1 daje stabilizujuće rješenje, ali performanse nisu zadovoljavajuće, vratiti se na Korak 1 i povećati vrijednost parametra  $\epsilon_i$ .
- 

### 3.4 COR u mrežama introspektivnih agenata

U ovom poglavlju će prvo biti prezentovan distribuirani OF kontroler za rješavanje COR problema. Nakon toga će biti izvršena analiza stabilnosti i biće prezentovan metod za dizajn parametara kontrolera.

Posmatrajmo OF kontroler koji ima sljedeću formu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{d}_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_i & E_i \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{d}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} L_i^x \\ L_i^d \end{bmatrix} \left( y_i - \begin{bmatrix} C_i & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{d}_i \end{bmatrix} \right), \\ \hat{\zeta}_i &= S\hat{\zeta}_i + L_i^\zeta \varepsilon_i, \\ u_i &= K_i^x \hat{x}_i + K_i^d \hat{d}_i + K_i^\zeta \hat{\zeta}_i, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.23)$$

gdje vektori  $\hat{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $\hat{d}_i \in \mathbb{R}^{q_d}$  i  $\hat{\zeta}_i \in \mathbb{R}^{q_\zeta}$  predstavljaju estimacije promjenljivih  $x_i$ ,  $d$  i  $\zeta$ , respektivno. Pojačanja opservera  $L_i^x$ ,  $L_i^d$ ,  $L_i^\zeta$ , kao i pojačanja kontrolera  $K_i^x$ ,  $K_i^d$ ,  $K_i^\zeta$ , predstavljaju parametre koje je potrebno dizajnirati.

U slučaju introspektivnih agenata, virtuelna greška  $\varepsilon_i \in \mathbb{R}^p$  se definiše na sljedeći način

$$\varepsilon_i = \sum_{j=0}^N l_{ij}y_j - \mu(y_i - R\hat{\zeta}_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.24)$$

gdje je parametar  $\mu$  realni skalar. Važno je uočiti da se jednačina (3.24) razlikuje od virtuelne greške kod ROF kontrolera po tome sadrži član  $y_i$  umjesto člana  $C_i\hat{x}_i$ , iz razloga što introspektivni agenti imaju informaciju o svom izlazu.

**Primjedba 3.5.** Kod OF kontrolera (3.23), referentni signal se estimira distribuiranim opserverom na osnovu virtuelnog signala greške, dok se poremećaj i stanja podsistema estimiraju lokalnim opserverom. Ovaj pristup se značajno razlikuje od pristupa u radovima [26, 68], u kojim se referentni signal i poremećaj estimiraju pomoću distribuiranog opservera na osnovu informacija koje se razmjenjuju kroz mrežu. Prednost konstruisanja lokalnog opservera je u tome što se značajno pojednostavljuje postupak sinteze parametara opservera.

Kao i kod ROF protokola, usvojicemo da se pojačanja  $K_i^d$  i  $K_i^\zeta$  određuju iz relacija (3.8). Odstupanje trenutne vrijednosti vektora stanja  $x_i$  od njegove vrijednosti u stacionarom stanju, kao i greške u estimaciji lokalnog i distribuiranog opservera, se definišu na sljedeći način

$$e_i = x_i - \Pi_i^d d - \Pi_i^\zeta \zeta, \quad \tilde{e}_i = \begin{bmatrix} \tilde{x}_i \\ \tilde{d}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_i - x_i \\ \hat{d}_i - d \end{bmatrix}, \quad \tilde{\zeta}_i = \hat{\zeta}_i - \zeta.$$

Uzimajući u obzir da važe regulatorske jednačine (3.5), lako se pokazuje da se dinamika spregnutog sistema može zapisati u sljedećem obliku

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_i \\ \dot{\tilde{e}}_i \\ \dot{\tilde{\zeta}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i + B_i K_i^x & B_i K_i^{xd} & B_i K_i^\zeta \\ 0 & H_i + L_i^{xd} G_i & 0 \\ 0 & 0 & S + \mu L_i^\zeta R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_i \\ \tilde{e}_i \\ \tilde{\zeta}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_i^\zeta \end{bmatrix} \xi_i.$$

Analogno proceduri iz prethodnog poglavlja, promjenljiva  $\xi_i$  se definiše na sljedeći način  $\xi_i = \sum_{j=1}^N l_{ij} C_j e_j - \mu C_i e_i$ , dok su matrice  $H_i$ ,  $G_i$ ,  $K_i^{xd}$  i  $L_i^{xd}$  jednake:

$$H_i = \begin{bmatrix} A_i & E_i \\ 0 & D \end{bmatrix}, \quad G_i = \begin{bmatrix} C_i & Q \end{bmatrix},$$

$$K_i^{xd} = \begin{bmatrix} K_i^x & K_i^d \end{bmatrix}, \quad L_i^{xd} = \begin{bmatrix} L_i^x \\ L_i^d \end{bmatrix}.$$

Koristeći notaciju (3.9), matrica stanja spregnutog sistema se može zapisati na sljedeći način

$$A_{CL} = \begin{bmatrix} A + BK^x & BK^{xd} & BK^\zeta \\ 0 & H + L^{xd}G & 0 \\ L^\zeta(\tilde{L} - \mu I)C & 0 & \tilde{S} + \mu L^\zeta \tilde{R} \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

gdje je  $\tilde{S} = I_N \otimes S$  i  $\tilde{R} = I_N \otimes R$ . Koristeći iste argumente kao u prethodnom poglavlju, lako se može doći do zaključka da je obezbjeđivanje stabilnosti matrice  $A_{CL}$  ekvivalentno rješavanju



COR problema.

### 3.4.1 Analiza stabilnosti

Najprije definišimo matricu

$$\bar{A}_{CL} = \begin{bmatrix} A + BK^x & BK^\zeta \\ L^\zeta(\tilde{\mathcal{L}} - \mu I)C & \tilde{S} + \mu L^\zeta \tilde{R} \end{bmatrix},$$

koja nam je potrebna za formulaciju naredne leme.

**Lema 3.3.** *Matrica stanja spregnutog sistema (3.25) je Hurwitz stabilna ako i samo ako su matrice  $H + L^{xd}G$  i  $\bar{A}_{CL}$  Hurwitz stabilne.*

*Dokaz.* Dokaz direktno slijedi iz sljedeće relacije sličnosti

$$A_{CL} \sim \begin{bmatrix} H + L^{xd}G & 0 \\ [BK^{xd}] & \bar{A}_{CL} \end{bmatrix}.$$

□

Stabilizacija matrice  $H + L^{xd}G$  se svodi na određivanje pojačanja  $L_i^{xd}$  na takav način da njeni pojedinačni blokovi  $H_i + L_i^{xd}G_i$  budu stabilni, što je uvijek moguće postići pod Pretpostavkom 3.4.2. S druge strane, osiguravanje stabilnosti matrice  $\bar{A}_{CL}$  je kompleksniji zadatak kojem će pažnja biti posvećena u nastavku.

U cilju analize stabilnosti matrice  $\bar{A}_{CL}$ , definišimo sljedeće matrice u prostoru stanja

$$\hat{A}_i = \begin{bmatrix} A_i + B_i K_i^x & B_i K_i^\zeta \\ 0 & S + \mu L_i^\zeta R \end{bmatrix}, \hat{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ L_i^\zeta \end{bmatrix}, \hat{C}_i = [C_i \ 0], \quad (3.26)$$

kojima odgovara funkcija prenosa

$$T_i(s) = \hat{C}_i (sI - \hat{A}_i)^{-1} \hat{B}_i. \quad (3.27)$$

Sada možemo prezentovati teoremu u okviru koje je dat uslov za stabilnost multiagentnog sistema u slučaju OF protokola.

**Teorema 3.2.** *Neka važe Pretpostavke 3.1-3.3, 3.4.2 i 3.5 i neka je matrica  $H + L^{xd}G$  stabilna. Tada, OF protokol (3.23) rješava problem kooperativne regulacije izlaza u multiagentnom*

sistemu (3.1)-(3.3) ukoliko je zadovoljen sljedeći uslov:

$$\|T_i\|_\infty < \gamma^*, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.28)$$

pri čemu je  $\gamma^* = \frac{1}{\rho(\mu I - \bar{L})}$ .

*Dokaz.* Imajući u vidu Lemu 3.3, pod pretpostavkom da je matrica  $H + L^{xd}G$  stabilna, preostaje da se obezbijedi stabilnost matrice  $\bar{A}_{CL}$ . Analiza stabilnosti matrice  $\bar{A}_{CL}$  je analogna analizi sprovedenoj u dokazu Teoreme 3.1, pri čemu treba voditi računa o novodefinisanim matricama  $\hat{A}_i$ ,  $\hat{B}_i$ ,  $\hat{C}_i$  i odgovarajućoj funkciji prenosa  $T_i(s) = \hat{C}_i(sI - \hat{A}_i)^{-1}\hat{B}_i$ .  $\square$

U nastavku će biti utvrđena donja granica  $\mathcal{H}_\infty$  norme  $\|T_i\|_\infty$ , koja ima važnu ulogu u analizi rješivosti COR problema.

**Lema 3.4.** *Neka je funkcija prenosa  $T_i(s)$  stabilna. Tada je  $\mu^{-1}$  donja granica  $\mathcal{H}_\infty$  norme  $\|T_i\|_\infty$ , tj.*

$$\|T_i\|_\infty \geq \mu^{-1}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.29)$$

*Dokaz.* Uvedimo transformacionu matricu

$$M_i = \begin{bmatrix} I & -\Pi_i^\zeta \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

U novim koordinatama, matrice u prostoru stanja (3.26) zapisujemo u formi  $\check{A}_i = M_i \hat{A}_i M_i^{-1}$ ,  $\check{B}_i = M_i \hat{B}_i$  i  $\check{C}_i = \hat{C}_i M_i^{-1}$ , tj.

$$\check{A}_i = \begin{bmatrix} A_i + B_i K_i^\zeta & -\mu \Pi_i^\zeta L_i^\zeta R \\ 0 & S + \mu L_i^\zeta R \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

$$\check{B}_i = \begin{bmatrix} -\Pi_i^\zeta L_i^\zeta \\ L_i^\zeta \end{bmatrix}, \quad \check{C}_i = \begin{bmatrix} C_i & R \end{bmatrix}.$$

Ostatak dokaza je analogan dokazu Leme 3.2.  $\square$

**Posljedica 3.2.** *Lokalni uslov stabilnosti (3.28) je moguće zadovoljiti ako i samo ako važe Pretpostavka 3.1 i uslov*

$$\mu > \frac{1 + \rho(\bar{A})}{2}. \quad (3.31)$$

*Dokaz.* Dokaz je analogan dokazu Posljedice 3.1.  $\square$

**Primjedba 3.6.** Aciklični grafovi predstavljaju specijalan tip grafova koji je opsežno proučavan u literaturi kooperativnog upravljanja [79–81]. Za aciklične grafove je karakteristično to što je njegove čvorove uvijek moguće indeksirati na takav način da matrica  $\bar{L}$  ima donje trougaonu strukturu sa jedinicama na glavnoj dijagonali. Zbog ovakve strukture matrice  $\bar{L}$ , važiće  $\gamma^* \rightarrow \infty$  ukoliko je  $\mu = 1$ , što dalje znači da je za rješivost COR problema pomoću ROF i OF protokola dovoljno da lokalne funkcije prenosa budu stabilne.

### 3.4.2 Sinteza kontrolera

U ovom potpoglavlju je opisan postupak sinteze parametara OF kontrolera. Kao i kod ROF protokola, biće usvojena sekvencijalna procedura za određivanje pojačanja. Konkretno, u prvom koraku je potrebno odrediti pojačanja opservera  $L_i^{xd}$  i  $L_i^\zeta$  na takav način da matrice  $H_i + L_i^{xd}G_i$  i  $S + \mu L_i^\zeta R$  budu Hurwitz stabilne, što je uvijek moguće postići pod Pretpostavkom 3.4.2. U drugom koraku, pod Pretpostavkom 3.3 je potrebno pronaći pojačanje  $K_i^x$  tako da matrica  $A_i + B_i K_i^x$  bude Hurwitz stabilna i da važi uslov  $\|T_i\|_\infty < \gamma_i$ , pri čemu je  $\gamma_i \leq \gamma^*$ .

S obzirom da su sopstvene vrijednosti matrica  $H_i + L_i^{xd}G$  nezavisne od preostalih sopstvenih vrijednosti matrice  $A_{CL}$  (Lema 3.3), za određivanje pojačanja  $L_i^{xd}$  se može iskoristiti bilo koji standardni metod zasnovan na ARE. Konkretno, koristićemo sljedeću ARE:

$$Y_i(\kappa_i)H_i^T + H_i Y_i(\kappa_i) - Y_i(\kappa_i)G_i^T G_i Y_i(\kappa_i) + \kappa_i I = 0, \quad (3.32)$$

koja pod Pretpostavkom 3.4.2 uvijek ima rješenje za bilo koje  $\kappa_i > 0$  [82]. Nakon računanja  $Y_i(\kappa_i)$ , pojačanje  $L_i^{xd}$  se određuje iz relacije  $L_i^{xd} = -Y_i(\kappa_i)G_i^T$ .

S druge strane, pojačanje  $L_i^\zeta$  se može odrediti iz relacije  $L_i^\zeta = -\mu^{-1}X_i(\epsilon_i)R^T$ , gdje je  $X_i(\epsilon_i)$  rješenje ARE koja je uvedena u Potpoglavlju 3.3.2:

$$X_i(\epsilon_i)S^T + S X_i(\epsilon_i) - \delta_i X_i(\epsilon_i)R^T R X_i(\epsilon_i) + \epsilon_i I = 0. \quad (3.33)$$

U prethodnoj jednačini  $\delta_i$  predstavlja malu pozitivnu konstantu, dok je  $\epsilon_i > 0$  parametar koji je moguće podešavati.

Nakon određivanja matrice  $L_i^\zeta$ , preostaje da se odredi pojačanje  $K_i^x$ . Primijetimo da se

matrica  $\hat{A}_i$  može zapisati u obliku  $\hat{A}_i = \bar{A}_i + \bar{B}_i K_i^x \bar{C}_i$ , gdje je

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i \Gamma_i^\zeta \\ 0 & S + \mu L_i^\zeta R \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_i = \begin{bmatrix} I & -\Pi_i^\zeta \end{bmatrix}.$$

Odgovarajuće pojačanje  $K_i^x$  se može odrediti pomoću  $\mathcal{H}_\infty$  SOF algoritma 3.1. Treba napomenuti da se preostala pojačanja računaju na osnovu relacija  $K_i^d = \Gamma_i^d - K_i^x \Pi_i^d$  i  $K_i^\zeta = \Gamma_i^\zeta - K_i^x \Pi_i^\zeta$ .

Kompletna procedura za dizajn parametara OF kontrolera je sumarižovana u Algoritmu 3.3. Detaljnija analiza rješivosti COR problema pomoću predloženog kontrolera će biti prezentovana u Poglavlju 3.5.

---

**Algoritam 3.3** Sinteza OF kontrolera

---

1: Usvojiti vrijednost parametra  $\mu$  tako da je zadovoljen uslov (3.31). Inicijalizovati parametre  $\kappa_i$ ,  $\epsilon_i$  i  $\delta_i$ .

2: Izračunati  $L_i^{xd} = -Y_i(\kappa_i)G_i^T$ , gdje je matrica  $Y_i(\kappa_i)$  rješenje ARE:

$$Y_i(\kappa_i)H_i^T + H_i Y_i(\kappa_i) - Y_i(\kappa_i)G_i^T G_i Y_i(\kappa_i) + \kappa_i I = 0. \quad (3.34)$$

3: Izračunati  $L_i^\zeta = -\mu^{-1} X_i(\epsilon_i)R^T$ , gdje je matrica  $X_i(\epsilon_i)$  rješenje ARE:

$$X_i(\epsilon_i)S^T + S X_i(\epsilon_i) - \delta_i X_i(\epsilon_i)R^T R X_i(\epsilon_i) + \epsilon_i I = 0. \quad (3.35)$$

4: Odrediti pojačanje  $K_i^x$  pomoću Algoritma 3.1.

5: Ukoliko Algoritam 3.1 ne daje stabilizujuće rješenje, vratiti se na Korak 1 i smanjiti vrijednost parametra  $\epsilon_i$ . Ukoliko Algoritam 3.1 daje stabilizujuće rješenje, ali performanse nisu zadovoljavajuće, vratiti se na Korak 1 i povećati vrijednost parametra  $\epsilon_i$ .

---

### 3.5 Analiza rješivosti

U ovom dijelu će biti izvršena detaljna analiza rješivosti COR problema primjenom predloženih protokola. Cilj analize je uspostavljanje teorijskih garancija za rješivost COR-a, uz određene pretpostavke o dinamici lidera. Konkretno, biće pokazano da se COR problem uvijek može riješiti OF protokolom, dok se rješivost ROF protokolom može garantovati za agente koji zadovoljavaju uslov  $\lambda(A_i) \in \bar{\mathcal{C}}^-$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Najprije je potrebno uvesti dvije leme koje su fundamentalne za dobijanje glavnih rezultata.

**Lema 3.5.** *Neka je zadat sistem čiji je model u prostoru stanja*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + \mu LC)x + Lu \\ y &= Cx,\end{aligned}\tag{3.36}$$

kojem odgovara funkcija prenosa

$$G(s) = C(sI - A - \mu LC)^{-1}L,\tag{3.37}$$

pri čemu je matrica  $A$  anti-Hurwitz stabilna, dok je par  $(C, A)$  detektabilan. Tada, za svako  $\chi > \mu^{-1}$  postoji matrica pojačanja  $L$  takva da važi  $\|G\|_\infty < \chi$ . Pojačanje  $L$  se može odrediti iz relacije  $L = -\mu^{-1}PC^T$ , gdje je  $P > 0$  rješenje sljedeće ARE

$$PA^T + AP + \epsilon I + \left(\frac{1}{\mu^2\chi^2} - 1\right)PC^T CP = 0,\tag{3.38}$$

pri čemu je  $\epsilon$  pozitivna konstanta.

*Dokaz.* Na osnovu *bounded real* leme (BRL) [83] znamo da je matrica  $A + \mu LC$  Hurwitz stabilna i da važi  $\|G\|_\infty < \chi$ , ukoliko postoji matrica  $P > 0$  koja zadovoljava nejednakost

$$P(A + \mu LC)^T + (A + \mu LC)P + \frac{1}{\chi^2}LL^T + PC^T CP < 0.\tag{3.39}$$

Za  $L = -\mu^{-1}PC^T$  nejednakost (3.39) se svodi na

$$PA^T + AP + \left(\frac{1}{\mu^2\chi^2} - 1\right)PC^T CP < 0.\tag{3.40}$$

Budući da matrica  $A$  sadrži sopstvene vrijednosti sa nenegativnim realnim dijelom, to znači da ne postoji matrica  $P > 0$  koja zadovoljava nejednakost (3.40) dok god je  $\mu^{-2}\chi^{-2} - 1 \geq 0$ , odakle se može zaključiti da mora važiti nejednakost  $\chi > \mu^{-1}$ .

Na kraju, primijetimo da je nejednakost (3.40) zadovoljena za svako  $P > 0$  koje je rješenje ARE (3.38). Postojanje takve matrice  $P$  je zagarantovano detektabilnošću para  $(C, A)$  [82].  $\square$

Važno je napomenuti da se za vrijednost pojačanja  $L$ , pored relacije  $L = -\mu^{-1}PC^T$ , mogu usvojiti i drugi izrazi koji zavise od matrice  $P$ . Međutim, ovakvim izborom pojačanja  $L$  može se postići minimalna vrijednost  $\mathcal{H}_\infty$  norme funkcije prenosa  $G(s)$ , o čemu je više detalja dato

u nastavku.

**Lema 3.6.** *Za sistem (3.36) čija je funkcija prenosa (3.37), pri čemu je  $A$  anti-Hurwitz stabilna matrica, važi nejednakost*

$$\|G\|_{\infty} \geq \mu^{-1}.$$

*Dokaz.* Primjenom upravljačkog zakona  $u = -\mu y$  na sistem (3.36) dobija se spregnuti sistem čija je matrica stanja  $A$ , koja je anti-Hurwitz stabilna po pretpostavci. Samim tim, primjenom teoreme malog pojačanja se može zaključiti da nejednakost  $\|G\|_{\infty} \geq \mu^{-1}$  mora uvijek važiti.  $\square$

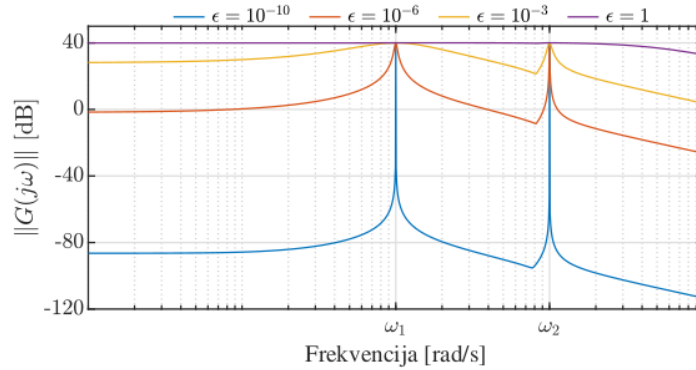
**Primjedba 3.7.** U slučaju kada je  $A$  anti-Hurwitz stabilna matrica, Lema 3.5 i Lema 3.6 impliciraju da uvijek postoji pojačanje  $L$  za koje je  $\|G\|_{\infty} \in [\mu^{-1}, \chi)$ , pri čemu vrijednost parametra  $\chi$  može biti proizvoljno blizu  $\mu^{-1}$ . U slučaju kada je matrica  $A$  Hurwitz stabilna, ne postoji ograničenje za donju granicu norme  $\|G\|_{\infty}$  budući da nejednakost  $\|G\|_{\infty} \leq \chi$  može biti zadovoljena za bilo koje  $\chi > 0$ .

**Primjedba 3.8.** Neka je  $\chi = \mu^{-1} + \Delta$ , gdje je  $\Delta > 0$  mala konstanta. Tada se za bilo koju vrijednost parametra  $\epsilon > 0$  dobija  $\|G\|_{\infty} \approx \mu^{-1}$ . Dalje, poznato je da je matrica  $P(\epsilon)$ , koja predstavlja rješenje ARE (3.38), monotono neopadajuća. Samim tim, u specijalnom slučaju kada sopstvene vrijednosti matrice stanja leže u zatvorenoj lijevoj poluravni kompleksne ravni,  $P(\epsilon)$  i  $L$  će težiti nuli u slučaju kada  $\epsilon$  teži nuli [84, 85].

Da bi ilustrovali scenario iz Primjedbe 3.8, razmotren je primjer marginalno stabilnog MIMO sistema  $G(s)$ . Sistem  $G(s)$  je sedmog reda i ima dva para konjugovano kompleksnih polova na imaginarnoj osi ( $\pm j\omega_1$  i  $\pm j\omega_2$ ). Na slici 3.1 je prikazana funkcija  $\|G(j\omega)\|$ , odnosno najveća singularna vrijednost matrice  $G(j\omega)$  u zavisnosti od frekvencije. Razmotrene su različite vrijednosti parametra  $\epsilon$ , dok je  $\mu^{-1} = 100$  i  $\chi = \mu^{-1} + 0.01$ . Može uočiti da slučaju kada je  $\epsilon = 10^{-10}$ , maksimum funkcije  $\|G(j\omega)\|$  približno iznosi  $\mu^{-1}$ , pri čemu se on postiže na frekvencijama  $\omega_1$  i  $\omega_2$ . Ova vrijednost maksimuma zapravo predstavlja  $\mathcal{H}_{\infty}$  normu sistema. Na ostalim frekvencijama  $\|G(j\omega)\|$  teži ka nuli, iz razloga što  $L$  takođe teži ka nuli. Sa druge strane, s povećavanjem parametra  $\epsilon$  povećava se i pojačanje  $L$ , što dovodi do rasta funkcije  $\|G(j\omega)\|$ . Međutim,  $\mathcal{H}_{\infty}$  norma  $\|G(j\omega)\|_{\infty}$  ostaje nepromijenjena.

### **Analiza rješivosti COR problema pomoću ROF protokola**

U ovom dijelu će biti dati rezultati vezani za rješivost COR problema ROF protokolom.



Slika 3.1: Najveća singularna vrijednost sistema  $G(s)$  u zavisnosti od frekvencije. Sistem ima dva para konjugovano kompleksnih polova na imaginarnoj osi ( $\pm j\omega_1$  i  $\pm j\omega_2$ ), pri čemu je  $\mu^{-1} = 100$  i  $\chi = \mu^{-1} + 0.01$ .

Najprije je potrebno uvesti matrice

$$\check{H}_i = \begin{bmatrix} A_i & -B_i\Gamma_i^d & -B_i\Gamma_i^\zeta \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix}, \quad \check{L}_i = \begin{bmatrix} [I \ -\Pi_i^d \ -\Pi_i^\zeta] L_i \\ L_i^d \\ L_i^\zeta \end{bmatrix},$$

$$\check{G}_i = \begin{bmatrix} -C_i & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Funkcija prenosa (3.12) se u zavisnosti od matrica u prostoru stanja (3.17) može zapisati u obliku  $T_i(s) = \check{C}_i(sI - \check{A}_i)^{-1}\check{B}_i$ . Sređivanjem ovog izraza dobija se

$$T_i(s) = C_i(sI - A_i - B_iK_i^x)^{-1} \begin{bmatrix} I & -\Pi_i^d & -\Pi_i^\zeta \end{bmatrix} L_i + \left( I + \mu C_i(sI - A_i - B_iK_i^x)^{-1} \begin{bmatrix} I & -\Pi_i^d & -\Pi_i^\zeta \end{bmatrix} L_i \right) \check{G}_i(sI - \check{H}_i - \mu\check{L}_i\check{G}_i)^{-1}\check{L}_i. \quad (3.41)$$

Uvođenjem funkcije prenosa  $\bar{T}_i(s) = \check{G}_i(sI - \check{H}_i - \mu\check{L}_i\check{G}_i)^{-1}\check{L}_i$ , za koju se može pokazati da je ekvivalentna funkciji prenosa  $\bar{T}_i(s) = G_i(sI - H_i - \mu L_i G_i)^{-1} L_i$ , izraz (3.41) možemo zapisati u kompaktnijem obliku:

$$T_i(s) = C_i(sI - A_i - B_iK_i^x)^{-1} \begin{bmatrix} I & -\Pi_i^d & -\Pi_i^\zeta \end{bmatrix} L_i + \left( I + \mu C_i(sI - A_i - B_iK_i^x)^{-1} \begin{bmatrix} I & -\Pi_i^d & -\Pi_i^\zeta \end{bmatrix} L_i \right) \bar{T}_i(s). \quad (3.42)$$

**Pretpostavka 3.6.** Sopstvene vrijednosti matrica  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , se nalaze u zatvorenoj lijevoj poluravni kompleksne ravni, dok se sopstvene vrijednosti matrica  $D$  i  $S$  nalaze na

imaginarnoj osi.

**Teorema 3.3.** *Neka važe Pretpostavke 3.1-3.6 i neka je parametar  $\mu$  odabran tako da je uslov (3.18) zadovoljen. Tada je ROF protokolom (3.6) uvijek moguće riješiti COR problem. Štaviše, za dovoljno malu vrijednost parametra  $\epsilon_i$ , pojačanja  $K_i$  i  $L_i$  je moguće odrediti primjenom Algoritma 3.2.*

*Dokaz.* ARE (3.22) u Algoritmu 3.2 se svodi na ARE (3.38) za  $\delta_i = 1 - \mu^{-2}\chi^{-2}$ . Pod Pretpostavkom 3.6, matrica  $H_i$  ima sopstvene vrijednosti u zatvorenoj lijevoj poluravni kompleksne ravni, te iz Primjedbe 3.8 slijedi da  $L_i^\zeta \rightarrow 0$  kada  $\epsilon_i \rightarrow 0$ . Samim tim, za bilo koje pojačanje  $K_i^x$  koje stabilizuje matricu  $A_i + B_i K_i^x$  dobija se  $T_i(s) \rightarrow \bar{T}_i(s)$ . Odabir dovoljno malog parametra  $\delta_i$  u Algoritmu 3.2 ima za posljedicu  $\|\bar{T}_i\|_\infty \rightarrow \mu^{-1}$ , što dalje implicira  $\|T_i\|_\infty \rightarrow \mu^{-1}$ . Ostatak dokaza slijedi iz Posljedice 3.1.  $\square$

**Primjedba 3.9.** Za  $\epsilon_i \rightarrow 0$ , Teorema 3.3 garantuje rješivost COR problema ROF protokolom (3.6) u slučaju kada pratioci imaju polove u zatvorenoj lijevoj poluravni kompleksne ravni. S druge strane, odziv sistema postaje brži sa povećavanjem  $\epsilon_i$ , pošto se matrica  $X_i(\epsilon_i)$  i upravljački signal takođe povećavaju. Međutim, iako za veće vrijednosti parametra  $\epsilon_i$  i dalje važi  $\|\bar{T}_i\|_\infty \rightarrow \mu^{-1}$ , ostali članovi u izrazu za  $T_i(s)$  postaju nezanemarljivi, što dovodi do povećanja  $\mathcal{H}_\infty$  norme  $\|T_i\|_\infty$ . Samim tim, smanjuje se vjerovatnoća da  $\mathcal{H}_\infty$  SOF algoritam pronađe odgovarajuće pojačanje  $K_i^x$ . Pored toga, važno je napomenuti da u slučaju kada agent ili egzosistem imaju polove u otvorenoj desnoj poluravni kompleksne ravni, nije moguće unapred garantovati rješivost COR-a, s obzirom da ne postoji  $\epsilon_i$  za koje važi  $L_i \rightarrow 0$ . Naime, sa udaljavanjem polova egzosistema ili agenata od imaginarne ose, za stabilizaciju sistema će biti potrebne sve veće vrednosti pojačanja  $L_i$ . Samim tim, biće sve teže minimizovati  $\mathcal{H}_\infty$  normu  $\|T_i\|_\infty$ , koja zavisi od  $L_i$  i od dinamike pratilaca. Važno je pomenuti da za opšte linearne sisteme postoji donja granica ispod koje  $\mathcal{H}_\infty$  norma ne može biti spuštena [86].

**Primjedba 3.10.** Iako naizgled ograničavajuća, Pretpostavka 3.6 obuhvata brojne bitne multiagentne sisteme koje se srijeću u literaturi, poput onih čiji se agenti modeluju integratorima prvog ili drugog reda [87, 88]. Pretpostavka da polovi egzosistema leže na imaginarnoj osi je uobičajena u većini radova, kao na primjer u radovima [26, 27, 44, 54, 63, 68, 72, 74]. Pod ovom pretpostavkom, egzosistemi kojima odgovaraju matrice  $S$  i  $D$  mogu generisati širok spektar referentnih signala i poremećaja koji su od praktičnog interesa, poput step signala, polinomijalnih signala, sinusoidalnih signala raznih frekvencija, kao i njihove linearne kombinacije [26]. Potencijalne praktične primjene obuhvataju kooperativno praćenje i održavanje formacija u mobilnim robotima [39, 74], upravljanje bespilotnim letelicama [69], upravljanje



robotskim manipulatorima [57] i slično.

**Primjedba 3.11.** Rješivost COR problema za specifične klase sistema je analizirana i u drugim radovima u literaturi. Na primjer, u radu [64] su proučavani agenti sa minimalno-faznom dinamikom i identičnim relativnim stepenom. U radu [72] je predložen metod za dizajn koji se zasniva na  $\mathcal{H}_\infty$  teoriji, ali nisu uspostavljene teorijske garancije za pronalaženje odgovarajućih pojačanja kontrolera, čak ni u slučaju kada su agenati stabilni u otvorenoj sprezi. Slično, u radu [65] pažnja je posvećena problemu sinhronizacije izlaza neintrospektivnih agenata, za koje je pretpostavljeno da su minimalno-fazni i da imaju jedan ulaz i izlaz (eng. *Single-Input Single-Output*, SISO).

### Analiza rješivosti COR problema pomoću OF protokola

U nastavku će biti izvršena analiza rješivosti COR problema OF protokolom.

Funkcija prenosa (3.27) se u zavisnosti od matrica u prostoru stanja (3.30) može zapisati u obliku  $T_i(s) = \check{C}_i(sI - \check{A}_i)^{-1}\check{B}_i$ . Sređivanjem ovog izraza dobija se

$$T_i(s) = -C_i(sI - (A_i + B_iK_i^x))^{-1}\Pi_i^\zeta L_i^\zeta + \left( I - \mu C_i(sI - (A_i + B_iK_i^x))^{-1}\Pi_i^\zeta L_i^\zeta \right) \bar{T}_i(s), \quad (3.43)$$

pri čemu je uvedena nova funkcija prenosa  $\bar{T}_i(s) = R(sI - (S + \mu L_i^\zeta R))^{-1}L_i^\zeta$ . Može se primijetiti da oblik funkcije prenosa  $\bar{T}_i(s)$  odgovara strukturi iz Leme 3.5.

**Pretpostavka 3.7.** Sopstvene vrijednosti matrice  $S$  se nalaze na imaginarnoj osi, tj.  $\text{Re}(\lambda(S)) = 0$ .

**Teorema 3.4.** *Neka važe Pretpostavke 3.1-3.5 i 3.7 i neka je parametar  $\mu$  odabran tako da je uslov (3.31) zadovoljen. Tada je OF protokolom (3.23) uvijek moguće riješiti COR problem. Štaviše, za dovoljno malu vrijednost parametra  $\epsilon_i$ , pojačanja  $K_i$  i  $L_i$  je moguće odrediti primjenom Algoritma 3.3.*

*Dokaz.* Za  $\delta_i = 1 - \mu^{-2}\chi^{-2}$ , ARE (3.35) u Algoritmu 3.3 se svodi na ARE (3.38). Pod Pretpostavkom 3.7, iz Primjedbe 3.8 slijedi da  $L_i \rightarrow 0$  kada  $\epsilon_i \rightarrow 0$ . Samim tim, za bilo koje pojačanje  $K_i^x$  koje stabilizuje matricu  $A_i + B_iK_i^x$ , dobija se  $T_i(s) \rightarrow \bar{T}_i(s)$ . Podešavanjem parametra  $\delta_i$  u Algoritmu 3.3 na dovoljno malu vrijednost postiže se da  $\|\bar{T}_i\|_\infty \rightarrow \mu^{-1}$ , što dalje implicira  $\|T_i\|_\infty \rightarrow \mu^{-1}$ . Ostatak dokaza slijedi iz Posljedice 3.2.  $\square$

**Primjedba 3.12.** Potrebno je napomenuti da većina postojećih protokola, pored Pretpostavke

3.7, zahtijeva ispunjenje dodatnih pretpostavki kako bi se garantovala rješivost COR problema. Na primjer, *low-gain* metod, koji je takođe zasnovan na distribuiranom opserversu [26], garantuje rješivost COR-a u slučaju kada važi  $E_i = 0$ . Sa druge strane, u pristupu prezentovanom u [71] se zahtijeva da dinamika agenata bude desno invertabilna. Na kraju, za razliku od nekih postojećih rezultata, predloženi metod ne nameće ograničenja na spektar matrice  $D$ , što omogućava njegovu primjenu na širu klasu poremećaja.

Konačno, treba napomenuti da je za OF protokol moguće izvesti zaključke analogne onima koji su prezentovani u Primjedbi 3.9.

## Glava 4

# Output containment control u multiagentnim sistemima bez razmjene stanja kontrolera

U prethodnoj glavi su prezentovani predlozi originalnih protokola koji rješavaju problem kooperativne regulacije izlaza pod pretpostavkom da stanja susjednih agenata nisu dostupna za dizajn lokalnih kontrolera. U slučaju kada multiagentni sistem sadrži više lidera, jedan od najčešće razmatranih problema predstavlja tzv. *output containment control* (OCC). Kod OCC-a je cilj da se dizajnira distribuirani upravljački zakon koji osigurava da izlazi pratilaca konvergiraju ka trajektorijama koje se nalaze unutar vremenski-promjenljivog minimalnog konveksnog skupa definisanog trajektorijama lidera. U ovoj glavi će biti prezentovan originalni OCC protokol koji je takođe zasnovan na pretpostavci da agenti međusobno razmjenjuju samo mjerenja izlaza. Pored toga, biće izložena metodologija za sintezu parametara predloženog upravljačkog protokola i izvršena analiza rješivosti OCC problema za različite klase sistema od praktičnog interesa. Na kraju, treba napomenuti da su glavni doprinosi koji su prezentovani u ovoj glavi publikovani u radu [2].

### 4.1 Uvod

Multiagentni sistemi sa lider-pratilac arhitekturom u opštem slučaju mogu da sadrže više lidera. Kada su u pitanju multiagentni sistemi sa jednim liderom, najveći dio dostupnih rezultata se odnosi na problem konsenzusa i kooperativnu regulaciju izlaza. U posljednje vrijeme, fokus istraživača je usmjeren na razvijanje konsenzus i COR protokola sa specifičnim

karakteristikama kao što su konvergencija u konačnom vremenu [89, 90], *event-triggered* komunikacija [91–93], otpornost na DoS [94] i FDI napade [95], robusnost na otkaze aktuatora [96] i kašnjenja u komunikaciji [97, 98], itd. S druge strane, u multiagentnim sistemima sa više lidera jedan od najčešće istraživanih upravljačkih problema je tzv. *containment control* (CC) problem. CC problem se smatra riješenim ukoliko stanja/izlazi pratilaca konvergiraju ka vremenski-promjenljivom minimalnom konveksnom skupu koji sadrži sve trajektorije lidera, što se postiže projektovanjem odgovarajućeg distribuiranog upravljačkog zakona. CC problem je naročito interesantan zbog svoje praktične primjene u multirobotskim sistemima. Naime, u scenarijima gdje grupa robota istražuje neki prostor od interesa, često samo pojedini roboti (lideri) raspolažu specijalnim sensorima koji im omogućavaju detekciju opasnih područja, prepreka i slično. U ovakvim situacijama, lideri imaju zadatak da generišu odgovarajuće trajektorije i njima definišu prostor u okviru kojeg je pratiocima dozvoljeno da se kreću. Posljednjih godina je publikovan veliki broj radova koje se bave *containment control* problemom u homogenim multiagentnim sistemima [30, 99–101]. Potpuno distribuirani protokol za rješavanje CC problema u homogenim linearnim multiagentnim sistemima koji su izloženi DoS napadima je predložen u [100]. Homogeni multiagentni sistemi na koje djeluju eksterni poremećaji su izučavani u [99, 101], dok je u [30] CC problem analiziran pod pretpostavkom da je dinamika pratilaca nepoznata.

U heterogenim multiagentnim sistemima stanja podsistema nisu direktno uporediva u opštem slučaju, pa se iz tog razloga kod njih najčešće zahtijeva da izlazi pratilaca budu sadržani u minimalnom konveksnom skupu koji obuhvata izlaze svih lidera. *Output containment control* (OCC) problem je u radu [102] riješen pomoću distribuiranog protokola koji je zasnovan na principu unutrašnjeg modela (IMP), dok su OCC protokoli koji su predloženi u radovima [13, 40, 103] zasnovani na distribuiranom opserveru. U [51] je predložen adaptivni distribuirani opserver koji rješava OCC problem u slučaju kada modeli lidera nisu dostupni svim pratiocima. Ostali rezultati vezani za OCC problematiku obuhvataju *event-triggered* kontrolere [104], kontrolere zasnovane na pojačanom učenju (eng. *reinforcement learning*) [105], kontrolere otporne na sajber napade [106], itd. Kada su u pitanju eksterni poremećaji, mali broj radova se bavi analizom njihovog uticaja na postizanje OCC-a. Konkretno, protokol koji rješava OCC problem u heterogenim multiagentnim sistemima sa  $\mathcal{H}_\infty$  optimalnim potiskivanjem nepoznatih poremećaja je predložen u [107]. S druge strane, u [45, 108] je predložen distribuirani opserver za estimaciju globalnih poremećaja čije su frekvencije poznate, pri čemu je pretpostavljeno da poremećaji i referentni signali sadrže iste frekvencijske komponente.

Kod većine postojećih protokola za kooperativno upravljanje [13, 20, 40, 45, 89, 96, 103, 105–109] se zahtijeva da agenti međusobno vrše razmjenu stanja kontrolera putem komunikacione mreže, pri čemu se ta stanja dalje koriste kao ulaz u distribuirani opserver. Štaviše, neki protokoli iziskuju i dodatnu razmjenu mjerenja izlaza [51, 94, 104]. U posljednje vrijeme, fokus istraživača je usmjeren na razvoj distribuiranih upravljačkih protokola koji se oslanjaju isključivo na razmjenu mjerenja izlaza. Prednost ovakvih protokola je dvostruka. S jedne strane, budući da je izlaz podsistema gotovo uvijek manjih dimenzija od stanja dinamičkog kontrolera, na ovaj način se se značajno smanjuje komunikaciono opterećenje [26, 68]. S druge strane, u scenarijima kada su agenti opremljeni sensorima za mjerenje relativne vrijednosti izlaza u odnosu na susjedne agente, ovi protokoli mogu biti implementirani bez potrebe za uspostavljanjem komunikacije, što ih čini otpornim na mrežne napade [66, 110]. Međutim, nedostatak informacija o stanjima kontrolera susjednih agenata stvara poteškoće u analizi spregnutog sistema i sintezi distribuiranih opservera. U radu [65] proučavan je problem postizanja konsenzusa bez razmjene stanja kontrolera u mrežama identičnih minimalno faznih agenata, dok su mreže heterogenih agenata sa desno invertabilnom dinamikom analizirane u [111]. Problem postizanja konsenzusa za homogene multiagentne sisteme sa opštom linearnom dinamikom je riješen u [66, 110] tako što je uveden lokalni opserver koji estimira grešku u sinhronizaciji. S druge strane, *low-gain* metod zasnovan na *small-gain* uslovu [26, 68] se pokazao korisnim za dizajn distribuiranih opservera za heterogene MAS sa opštom linearnom dinamikom. Međutim, ovaj metod ne garantuje rješivost konsenzus problema u prisustvu poremećaja, čime se značajno ograničava njegova praktična upotrebljivost. Pod pretpostavkom da agenti ne vrše međusobnu razmjenu stanja kontrolera, u [29] je razvijen protokol koji rješava OCC problem za homogene multiagentne sisteme, dok heterogeni multiagentni sistemi u ovom kontekstu još uvijek nisu razmatrani u literaturi.

Prethodna diskusija predstavljala je motivaciju za drugi dio istraživanja koja su sprovedena u okviru doktorske disertacije. Kao rezultat istraživanja, predložen je novi protokol kojim se rješava OCC problem u linearnim heterogenim multiagentnim sistemima sa usmjerenom komunikacionom topologijom. Predloženi protokol ne zahtijeva razmjenu stanja kontrolera između agenata i obezbjeđuje rješivost OCC problema u prisustvu eksternih poremećaja. U predloženom rješenju se putem distribuiranog opservera estimira konveksna kombinacija stanja lidera. S druge strane, poremećaji se estimiraju lokalnim opserverima, a zatim se njihov uticaj kompenzuje dodavanjem odgovarajućeg *feedforward* elementa u upravljačkom zakonu.

U nastavku su navedeni glavni doprinosi i najvažnije prednosti predloženog rješenja u odnosu na postojeće protokole.

1. U poređenju sa konsenzus [20, 89, 94, 96, 109] i CC [13, 40, 45, 51, 103–108] protokolima koji su takođe zasnovani na distribuiranom opserveru, predloženi protokol ne zahtijeva razmjenu stanja kontrolera između agenata. Umjesto toga, potrebno je da agenti razmjenjuju samo mjerenja izlaza, što značajno smanjuje komunikaciono opterećenje. Štaviše, ukoliko su pratioci opremljeni relativnim sensorima, onda se predloženi protokol može realizovati bez uspostavljanja komunikacije između agenata.
2. Za razliku od protokola [13, 51, 103–107], predloženi protokol rješava OCC problem čak i u prisustvu eksternih poremećaja. Budući da su poremećaji neizbježni u realnim scenarijima, ova osobina značajno proširuje mogućnosti praktične primjene predloženog protokola. Štaviše, globalni poremećaji i referentni signal se modeluju kao izlazi iz nezavisnih egzosistema, što predstavlja opštiji pristup u poređenju sa pristupima koji su predloženi u radovima [45, 108].
3. Razvijen je novi metod za sintezu parametara kontrolera, koji se zasniva na konceptima iz  $\mathcal{H}_\infty$  teorije i ARE tehnikama. Ovaj metod pruža veću fleksibilnost u dizajniranju parametara kontrolera u odnosu na *low-gain* metod [26, 68], a samim tim omogućava i postizanje boljih performansi spregnutog sistema. Teorijske garancije za rješivost OCC problema predloženim protokolom su uspostavljene u dva slučaja: i) kada je dinamika pratilaca minimalno fazna i desno invertabilna, ii) kada polovi egzosistema leže na imaginarnoj osi, dok pratioci mogu imati proizvoljnu linearnu dinamiku.
4. Za razliku od protokola [29], koji je primjenljiv samo na homogene multiagentne sisteme, predloženi protokol se može primijeniti i na heterogene multiagentne sisteme sa opštom linearnom dinamikom. Pored toga, predloženi protokol može riješiti i problem konsenzusa bez razmjene stanja kontrolera, budući da konsenzus predstavlja specijalni slučaj CC problema. Štaviše, predloženi pristup može biti primijenjen na znatno širu klasu sistema u odnosu na postojeće konsenzus protokole koji se takođe temelje isključivo na razmjeni mjerenja izlaza [26, 65, 66, 68, 110, 111].

## 4.2 Osnovni pojmovi i postavka problema

### 4.2.1 Teorija grafova

Posmatrajmo MAS koji se sastoji od  $N + M$  agenata, čije se međusobne interakcije modeluju usmjerenim grafom  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ . Agenti su indeksirani tako da  $\mathbb{F} = \{1, 2, \dots, N\}$  predstavlja skup pratilaca, dok  $\mathbb{L} = \{N + 1, N + 2, \dots, N + M\}$  označava skup lidera. Skup svih

čvorova se označava sa  $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_{N+M}\}$ , dok je  $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  skup grana. Smatraćemo da je graf  $\mathcal{G}$  vremenski-invarijantan i da je opisan odgovarajućom matricom susjedstva  $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{(N+M) \times (N+M)}$ , gdje je  $a_{ij} > 0$  ako je  $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$ , dok u suprotnom važi  $a_{ij} = 0$ . Takođe, podrazumijevaćemo da je graf prost, tj. da nema paralelnih grana i petlji ( $a_{ii} = 0, \forall i$ ). Grana usmjerena od čvora  $v_j$  ka čvoru  $v_i$ , u oznaci  $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$ , ukazuje da čvor  $v_i$  dobija informacije od čvora  $v_j, j \neq i$ . U tom slučaju se kaže da je čvor  $v_j$  susjed čvora  $v_i$ . Skup susjednih čvorova čvora  $v_i$  se označava sa  $\mathcal{N}_i = \{j : (v_j, v_i) \in \mathcal{E}\}$ . Matrica Laplasijana  $\mathcal{L} = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{(N+M) \times (N+M)}$  se definiše na sljedeći način  $l_{ij} = \sum_{k=1}^{N+M} a_{ik}$  za  $j = i$ , i  $l_{ij} = -a_{ij}$  za  $j \neq i$ . Smatraćemo da lideri ne dobijaju informacije od pratilaca, što dovodi do sljedeće particije matrice Laplasijana

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{L}_2 \\ \mathbf{0}_{M \times N} & \mathbf{0}_{M \times M} \end{bmatrix},$$

gdje je  $\mathcal{L}_1 \in \mathbb{R}^{N \times N}$  i  $\mathcal{L}_2 \in \mathbb{R}^{N \times M}$ . Bez gubitka opštosti, podrazumijevaće se da su matrice susjedstva i Laplasijana usmjerenog grafa normalizovane, tj. da važi  $\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} = 1, \forall i \in \mathbb{F}$ .

Niz sukcesivnih grana  $\{(v_i, v_l), (v_l, v_k), \dots, (v_p, v_j)\}$  naziva se usmjerenom putanjom od čvora  $v_i$  do čvora  $v_j$ . Usmjerenom putanja čiji su prvi i posljednji čvor isti, tj.  $v_i = v_j$ , naziva se ciklusom. Graf koji ne sadrži cikluse naziva se acikličnim. Za usmjereni graf  $\mathcal{G}$  se kaže da sadrži usmjerenom razapinjuće stablo ako postoji bar jedan čvor od kojeg postoji direktna putanja do svakog drugog čvora na grafu. Graf sadrži ujedinjeno razapinjuće stablo ako do svakog pratioca  $i \in \mathbb{F}$  postoji direktna putanja od bar jednog lidera  $k \in \mathbb{L}$ .

U nastavku su date dvije leme koje se odnose na matricu Laplasijana  $\mathcal{L}$ . Ove leme imaju važnu ulogu za dobijanje glavnih rezultata.

**Lema 4.1.** [112] *Ukoliko usmjereni graf  $\mathcal{G}$  sadrži ujedinjeno razapinjuće stablo, tada je matrica  $-\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2$  nenegativna i važi jednakost  $-\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2 \mathbf{1}_M = \mathbf{1}_N$ .*

**Lema 4.2.** *Nejednakost  $\rho(I - \mathcal{L}_1) < 1$  je zadovoljena ako i samo ako usmjereni graf  $\mathcal{G}$  sadrži ujedinjeno razapinjuće stablo.*

*Dokaz.* Uvedimo novu matricu Laplasijana

$$\bar{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{L}_2 \mathbf{1}_M \\ \mathbf{0}_N^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Usmjereni graf  $\bar{\mathcal{G}}$  koji odgovara matrici Laplasijana  $\bar{\mathcal{L}}$ , sadrži usmjerenom razapinjuće stablo sa liderom kao korijenom ako i samo ako graf  $\mathcal{G}$  sadrži ujedinjeno razapinjuće stablo [112].

Matrica  $\bar{\mathcal{A}}_1 = I - \mathcal{L}_1$  je nenegativna, što znači da se može primijeniti Peron-Frobenijusova teorema koja implicira da je  $\rho(\bar{\mathcal{A}}_1)$  sopstvena vrijednost matrice  $\bar{\mathcal{A}}_1$ . Budući da je  $\bar{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{A}}_1 & -\mathcal{L}_2^1 M \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , jasno je da pored sopstvenih vrijednosti matrice  $\bar{\mathcal{A}}_1$ , matrica  $\bar{\mathcal{A}}$  sadrži sopstvenu vrijednost 1. Štaviše, matrica  $\bar{\mathcal{A}}$  je desno stohastička, pa iz [70] slijedi da sadrži prostu sopstvenu vrijednost  $\rho(\bar{\mathcal{A}}) = 1$  ako i samo ako usmjereni graf  $\bar{\mathcal{G}}$  sadrži usmjereno razapinjuće stablo sa liderom kao korijenom. Iz prethodno navedenog, zaključuje se da je  $\rho(\bar{\mathcal{A}}_1) < 1$ , čime je dokaz kompletiran.  $\square$

## 4.2.2 Dinamika multiagentnog sistema

Posmatrajmo MAS koji sadrži  $N$  heterogenih pratilaca s opštom linearnom dinamikom:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A_i x_i + B_i u_i + E_i d \\ y_i &= C_i x_i + Q_i d, \quad i \in \mathbb{F}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

gdje su  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ ,  $y_i \in \mathbb{R}^p$  stanje, ulaz i izlaz<sup>1</sup>  $i$ -tog pratioca, respektivno. Poremećaj generiše sljedeći autonomni egzosistem

$$\dot{d} = Dd, \quad (4.2)$$

gdje je  $d \in \mathbb{R}^q$  stanje egzosistema. MAS sadrži  $M$  lidera koji imaju identične modele, pri čemu je dinamika  $k$ -tog lidera

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_k &= S\zeta_k \\ y_k &= R\zeta_k, \quad k \in \mathbb{L}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

gdje je  $\zeta_k \in \mathbb{R}^r$  stanje, dok je  $y_k \in \mathbb{R}^p$  izlaz lidera.

**Primjedba 4.1.** Prisustvo eksternih poremećaja je neizbježno u realnim multiagentnim sistemima. Klasičan primjer u praksi predstavlja mreža bespilotnih letilica (eng. *unmanned aerial vehicles*, UAVs) na koje djeluju jaki vjetrovi čija se dinamika može modelovati egzosistemom. Upravo (4.2) predstavlja model poremećaja koji se najčešće usvaja u literaturi [45, 108]. U pristupu koji će biti prezentovan, poremećaji će biti estimirani na lokalnom nivou, tj. svaki agent će u procesu estimacije isključivo koristiti informacije o sopstvenom izlazu. Samim tim, za svakog agenta je moguće usvojiti različitu matricu stanja egzosistema  $D_i$  [28]. Na primjer, matrica  $D_i$  može sadržati informacije o frekvencijskim komponentama poremećaja koje su zajedničke za globalnu i lokalnu sredinu. Međutim, treba napomenuti da u oba slučaja, bilo da

<sup>1</sup>I u ovoj glavi ćemo smatrati da je mjereni izlaz istovremeno i upravljani izlaz.



se usvoji zajednička matrica  $D$  za sve agente ili da se za pojedinačne agente usvoje različite matrice  $D_i$ , procedura za dizajn kontrolera je potpuno ista.

U nastavku će biti formalizovane pretpostavke koje su potrebne za rješavanje OCC problema.

**Pretpostavka 4.1.** Usmjereni graf  $\mathcal{G}$  sadrži ujedinjeno razapinjuće stablo.

**Pretpostavka 4.2.** Matrica  $S$  nema strogo stabilnih polova, tj.  $\lambda(S) \in \bar{\mathbb{C}}^+$ .

**Pretpostavka 4.3.** Matrica  $D$  nema strogo stabilnih polova, tj.  $\lambda(D) \in \bar{\mathbb{C}}^+$ .

**Pretpostavka 4.4.** Par  $(A_i, B_i)$  je stabilizabilan za svako  $i \in \mathbb{F}$ .

**Pretpostavka 4.5.** Parovi  $\left( \begin{bmatrix} C_i & Q_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_i & E_i \\ 0 & D \end{bmatrix} \right)$ ,  $\forall i \in \mathbb{F}$ , i  $(R, S)$  su detektabilni.

**Pretpostavka 4.6.** Linearne matrične jednačine

$$\begin{cases} \Pi_i^\zeta S = A_i \Pi_i^\zeta + B_i \Gamma_i^\zeta \\ 0 = C_i \Pi_i^\zeta - R, \end{cases} \quad (4.4a)$$

$$\begin{cases} \Pi_i^d D = A_i \Pi_i^d + B_i \Gamma_i^d + E_i \\ 0 = C_i \Pi_i^d + Q_i, \end{cases} \quad (4.4b)$$

imaju rješenja  $(\Pi_i^\zeta, \Gamma_i^\zeta)$  i  $(\Pi_i^d, \Gamma_i^d)$ , respektivno, za svako  $i \in \mathbb{F}$ .

**Primjedba 4.2.** Pretpostavke koje su usvojene su standardne u literaturi koja se bavi OCC problemom. Pretpostavka 4.1 je potrebna da bi OCC problem mogao da se riješi distribuiranim putem. Pretpostavke 4.2 i 4.3 se usvajaju kako bi se izbjegao trivijalan slučaj strogo stabilnih matrica  $S$  i  $D$ , budući da modovi koji odgovaraju sopstvenim vrijednostima sa negativnim realnim djelovima eksponencijalno konvergiraju ka nuli i ne utiču na odziv spregnutog sistema u stacionarnom stanju. Štaviše, ukoliko je OCC problem rješiv za linearni MAS pod Pretpostavkama 4.2 i 4.3, onda će sigurno biti rješiv i u slučaju kada ove pretpostavke nisu zadovoljene [102]. Pretpostavke 4.4 i 4.5 su standardne pretpostavke koje se odnose na stabilizabilnost i detektabilnost. Dodatno, u specijalnom slučaju kada je  $Q_i = 0$ , Pretpostavka 4.5 se svodi na detektabilnost parova  $(C_i, A_i)$  i  $(E_i, A_i)$  [74]. Pretpostavka 4.6 se odnosi na regulatorne jednačine iz klasične teorije upravljanja. Njihovo rješenje uvijek postoji kada je broj ulaza sistema veći ili jednak broju izlaza, pri čemu je ova pretpostavka zadovoljena za veliki broj sistema od praktičnog interesa [20, 29, 40, 74, 96, 105].

### 4.2.3 Postavka OCC problema

Usvojimo oznaku  $\text{dist}(x, \mathcal{C})$  za Euklidovo rastojanje vektora  $x \in \mathbb{R}^n$  od skupa  $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^n$ , tj.

$$\text{dist}(x, \mathcal{C}) = \inf_{y \in \mathcal{C}} \|x - y\|_2. \quad (4.5)$$

**Definicija 4.1.** [113] Skup  $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$  je konveksan ukoliko je  $(1 - \lambda)x + \lambda y \in \mathcal{C}$  za svako  $x, y \in \mathcal{C}$  i bilo koje  $\lambda \in [0, 1]$ . Konveksni omotač konačnog skupa tačaka  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_q\}$ , u oznaci  $\text{Co}(X)$ , je najmanji konveksni skup koji sadrži sve tačke iz  $X$ , tj.  $\text{Co}(X) = \{\sum_{i=1}^q \alpha_i x_i \mid x_i \in X, \alpha_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \sum_{i=1}^q \alpha_i = 1\}$ .

U nastavku je formalno definisan *Output Containment Control* (OCC) problem.

**Problem (OCC):** Za multiagentni sistem (4.1)-(4.3) čija je komunikaciona topologija opisana statičkim usmjerenim grafom  $\mathcal{G}$ , dizajnirati distribuirani upravljački protokol tako da spregnuti sistem bude globalno stabilan i da trajektorije pratilaca konvergiraju ka konveksnom omotaču definisanom trajektorijama lidera, tj. treba da važi uslov

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(y_i(t), \text{Co}(y_k(t), k \in \mathbb{L})) = 0, \quad i \in \mathbb{F}, \quad (4.6)$$

za proizvoljne početne uslove.

Ako se za svakog pratioca definiše takozvana lokalna *containment* greška

$$e_i = \sum_{j=1}^{N+M} a_{ij}(y_i - y_j), \quad i \in \mathbb{F}, \quad (4.7)$$

onda se globalna *containment* greška može zapisati na sljedeći način

$$e = (\mathcal{L}_1 \otimes I_p)y_F + (\mathcal{L}_2 \otimes I_p)y_L, \quad (4.8)$$

gdje je  $e = [e_1^T, e_2^T, \dots, e_N^T]^T$ ,  $y_L = [y_{N+1}^T, y_{N+2}^T, \dots, y_{N+M}^T]^T$  i  $y_F = [y_1^T, y_2^T, \dots, y_N^T]^T$ .

U nastavku je prezentovana lema koja ima bitnu ulogu u rješavanju OCC problema u heterogenom multiagentnom sistemu (4.1)-(4.3).

**Lema 4.3.** Neka važi *Pretpostavka 4.1*. Ukoliko je ispunjen uslov  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ , onda je *output containment control (OCC) problem uspješno riješen*.

*Dokaz.* Neka je  $e = 0$ . Ukoliko važi *Pretpostavka 4.1*, koristeći osobinu Kronekerovog

proizvoda  $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$  može se izvesti jednakost

$$y_F = -(\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2 \otimes I_p) y_L. \quad (4.9)$$

Na osnovu Leme 4.1 i definicija promjenljivih  $y_L$  i  $y_F$  lako se može zaključiti da se izlaz svakog pratioca nalazi u konveksnom omotaču definisanom izlazima lidera.  $\square$

### 4.3 OCC kontroler zasnovan na distribuiranom opserveru

U ovom poglavlju će biti prezentovan OCC protokol koji je zasnovan na opserveru, a za čiju je implementaciju potrebno da agenti razmjenjuju samo mjerenja izlaza [2]. Kontroler svakog pratioca se sastoji od: 1) lokalnog opservera koji vrši estimaciju eksternog poremećaja i stanja podsistema, 2) distribuiranog opservera pomoću kojeg se estimira konveksna kombinacija stanja lidera, i 3) povratne sprege po estimiranim stanjima. Konkretno, OCC protokol ima sljedeći oblik:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{d}_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_i & E_i \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{d}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} L_i^x \\ L_i^d \end{bmatrix} \left( y_i - \begin{bmatrix} C_i & Q_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{d}_i \end{bmatrix} \right) \\ \hat{\zeta}_i &= S \hat{\zeta}_i + L_i^\zeta \varepsilon_i \\ u_i &= K_i^x \hat{x}_i + K_i^d \hat{d}_i + K_i^\zeta \hat{\zeta}_i, \end{aligned} \quad (4.10)$$

gdje  $\hat{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $\hat{d}_i \in \mathbb{R}^q$  i  $\hat{\zeta}_i \in \mathbb{R}^r$  predstavljaju estimacije stanja podsistema, egzosistema koji generiše poremećaje i konveksne kombinacije stanja lidera, respektivno. Pojačanja povratne sprege  $K_i^x$ ,  $K_i^d$ ,  $K_i^\zeta$  (pojačanja kontrolera) i pojačanja opservera  $L_i^x$ ,  $L_i^d$ ,  $L_i^\zeta$  su parametri odgovarajućih dimenzija, koje je potrebno odrediti. Sa  $\varepsilon_i$  je označen virtuelni signal greške koji se definiše na sljedeći način

$$\varepsilon_i = e_i - y_i + R \hat{\zeta}_i. \quad (4.11)$$

**Primjedba 4.3.** Važno je napomenuti da postojeći OCC protokoli koji su zasnovani na opserveru [13,40,45,51,103–108] zahtijevaju razmjenu stanja kontrolera između agenata. Prednost protokola (4.10) je u tome što je za njegovu realizaciju potrebno da agenti razmjenjuju samo izlazni signal, koji je najčešće manjih dimenzija od stanja kontrolera, pa se time značajno umanjuje komunikaciono opterećenje. Štaviše, ukoliko agenti putem relativnih senzora mogu

da mjere vrijednost izlaza u odnosu na svoje susjede, protokol (4.10) se može implementirati bez uspostavljanja komunikacije, što je poželjno svojstvo i sa stanovišta sajber bezbjednosti [66, 110]. Ukoliko agenti ipak vrše razmjenu mjerenja, onda je u upravljačke protokole potrebno ugraditi dodatne mehanizme za zaštitu od potencijalnih napada [114]. Treba napomenuti da protokol (4.10) ima prednosti i u odnosu protokole [13, 51, 103–107], koje se ogledaju u njegovoj mogućnosti da kompenzuje uticaj eksternih poremećaja. Na kraju, protokol (4.10) je generalniji u odnosu na one predložene u [45, 108], kod kojih je pretpostavljeno da isti egzozistem generiše poremećaje i referentni signal.

Definišimo promjenljive  $x = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_N^T]^T$ ,  $\underline{d} = 1_N \otimes d$ ,  $\zeta = [\zeta_{N+1}^T, \zeta_{N+2}^T, \dots, \zeta_{N+M}^T]^T$ ,  $\hat{x} = [\hat{x}_1^T, \hat{x}_2^T, \dots, \hat{x}_N^T]^T$ ,  $\hat{d} = [\hat{d}_1^T, \hat{d}_2^T, \dots, \hat{d}_N^T]^T$ ,  $\hat{\zeta} = [\hat{\zeta}_1^T, \hat{\zeta}_2^T, \dots, \hat{\zeta}_N^T]^T$  i  $x_c = [x^T, \hat{x}^T, \hat{d}^T, \hat{\zeta}^T]^T$ . Nakon uvrštavanja upravljačkog zakona (4.10) u (4.1) i sređivanja, dobija se sljedeći model spregnutog multiagentnog sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c^d \underline{d} + B_c^\zeta \zeta \\ e &= C_c x_c + D_c^d \underline{d} + D_c^\zeta \zeta. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Lako se može pokazati da su matrice  $A_c$ ,  $B_c^d$ ,  $B_c^\zeta$ ,  $C_c$ ,  $D_c^d$  i  $D_c^\zeta$  jednake

$$A_c = \begin{bmatrix} A & BK^x & BK^d & BK^\zeta \\ L^x C & A + BK^x - L^x C & E + BK^d - L^x Q & BK^\zeta \\ L^d C & -L^d C & \tilde{D} - L^d Q & 0 \\ L^\zeta (\tilde{L}_1 - I) C & 0 & 0 & \tilde{S} + L^\zeta \tilde{R} \end{bmatrix},$$

$$B_c^d = \begin{bmatrix} E \\ L^x Q \\ L^d Q \\ L^\zeta (\tilde{L}_1 - I) Q \end{bmatrix}, \quad B_c^\zeta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ L^\zeta \tilde{L}_2 (I_M \otimes R) \end{bmatrix},$$

$$C_c = \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 C & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_c^d = \tilde{L}_1 Q, \quad D_c^\zeta = \tilde{L}_2 (I_M \otimes R),$$

gdje je  $\tilde{L}_1 = \mathcal{L}_1 \otimes I_p$ ,  $\tilde{L}_2 = \mathcal{L}_2 \otimes I_p$ ,  $\tilde{S} = I_N \otimes S$ ,  $\tilde{D} = I_N \otimes D$ ,  $\tilde{R} = I_N \otimes R$ . Pri zapisivanju prethodnih relacija korišćena je sljedeća notacija  $\Phi = \text{diag}\{\Phi_i\}$  za  $\Phi = (A, B, C, E, Q, K^x, K^d, K^\zeta, L^x, L^d, L^\zeta, \Pi^d, \Pi^\zeta)$ .

Sada ćemo pokazati da se rješavanje OCC problema svodi na obezbjeđivanje stabilnosti matrice  $A_c$ , pod uslovom da su zadovoljene Pretpostavke 4.1-4.3. S tim ciljem, najprije je

potrebno uvesti sljedeću lemu.

**Lema 4.4.** *Neka je  $A_c$  Hurwitz stabilna matrica. Ukoliko matrične jednačine*

$$\begin{cases} X^d \tilde{D} = A_c X^d + B_c^d \\ 0 = C_c X^d + D_c^d, \end{cases} \quad (4.13a)$$

$$\begin{cases} X^\zeta (I_M \otimes S) = A_c X^\zeta + B_c^\zeta \\ 0 = C_c X^\zeta + D_c^\zeta, \end{cases} \quad (4.13b)$$

imaju rješenje  $(X^d, X^\zeta)$ , tada je  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$  za bilo koje  $\underline{d}(t)$  i  $\zeta(t)$ .

*Dokaz.* Definišimo promjenljivu  $\tilde{x} = x_c - X^d \underline{d} - X^\zeta \zeta$ . Dinamika spregnutog sistema (4.12) se pomoću nove promjenljive može izraziti na sljedeći način

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A_c \tilde{x} + (A_c X^d + B_c^d - X^d (I_N \otimes D)) \underline{d} \\ &\quad + (A_c X^\zeta + B_c^\zeta - X^\zeta (I_M \otimes S)) \zeta \\ e &= C_c \tilde{x} + (C_c X^d + D_c^d) \underline{d} + (C_c X^\zeta + D_c^\zeta) \zeta. \end{aligned}$$

Imajući u vidu jednačine (4.13), prethodni izraz se svodi na

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A_c \tilde{x} \\ e = C_c \tilde{x}. \end{cases} \quad (4.14)$$

Budući da je  $A_c$  Hurwitz stabilna matrica, slijedi da je  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0$ , što dalje implicira da je  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ .  $\square$

**Primjedba 4.4.** Iz Leme 4.4 se može zaključiti da postojanje rješenja  $(X^d, X^\zeta)$  sistema jednačina (4.13) predstavlja potreban, ali ne i dovoljan uslov za rješavanje OCC problema. Da bi OCC problem bio rješiv, potrebno je takođe da važi Pretpostavka 4.1 [Teorema 3.1, [112]].

Na osnovu analogije sa klasičnom teorijom regulacije izlaza sistema, za vrijednosti pojačanja  $K_i^\zeta$  i  $K_i^d$  se mogu usvojiti sljedeći izrazi:

$$K_i^\zeta = \Gamma_i^\zeta - K_i^\zeta \Pi_i^\zeta, \quad K_i^d = \Gamma_i^d - K_i^d \Pi_i^d, \quad i \in \mathbb{F}, \quad (4.15)$$

gdje su parovi  $(\Pi_i^\zeta, \Gamma_i^\zeta)$  i  $(\Pi_i^d, \Gamma_i^d)$  rješenja regulatorskih jednačina (4.4).

**Teorema 4.1.** *Neka važe Pretpostavke 4.1-4.3 i 4.6 i neka je  $A_c$  Hurwitz stabilna matrica.*

Tada, protokol (4.10) rješava output containment control (OCC) problem za multiagentni sistem (4.1)-(4.3).

*Dokaz.* Budući da važi Pretpostavka 4.1, na osnovu Leme 4.4 može se zaključiti da je dovoljno pokazati da postoji rješenje  $(X^d, X^\zeta)$  sistema jednačina (4.13). Uvrštavanjem relacija (4.15) u regulatorne jednačine (4.4), dobija se izraz

$$\begin{cases} \Pi_i^d D = (A_i + B_i K_i^x) \Pi_i^d + B_i K_i^d + E_i \\ -Q_i = C_i \Pi_i^d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Pi_i^\zeta S = (A_i + B_i K_i^x) \Pi_i^\zeta + B_i K_i^\zeta \\ R = C_i \Pi_i^\zeta, \end{cases}$$

koji se dalje može zapisati u globalnoj formi

$$\begin{cases} \Pi^d \tilde{D} = (A + BK^x) \Pi^d + BK^d + E \\ -Q = C \Pi^d, \end{cases} \quad (4.16a)$$

$$\begin{cases} \Pi^\zeta \tilde{S} = (A + BK^x) \Pi^\zeta + BK^\zeta \\ \tilde{R} = C \Pi^\zeta. \end{cases} \quad (4.16b)$$

Stabilnost matrice  $A_c$  zajedno sa Pretpostavkama 4.2 i 4.3 garantuje postojanje jedinstvenog rješenja  $(X^d, X^\zeta)$  Silvestrovih jednačina (4.13). To rješenje je:

$$X^d = \begin{bmatrix} \Pi^d \\ \Pi^d \\ I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X^\zeta = \begin{bmatrix} -\Pi^\zeta (\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2 \otimes I_r) \\ -\Pi^\zeta (\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2 \otimes I_r) \\ 0 \\ -(\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2 \otimes I_r) \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

gdje je  $(\Pi^d, \Pi^\zeta)$  rješenje jednačina (4.16), čije je postojanje zagarantovano Pretpostavkom 4.6. Da je (4.17) zaista rješenje jednačine (4.13), može se lako pokazati uvrštavanjem (4.17) u (4.13), pri čemu treba imati u obzir i relaciju (4.16). U izvođenju je potrebno koristiti relacije  $(I_N \otimes S)(\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2 \otimes I_r) = (\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2 \otimes S) = (\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2 \otimes I_r)(I_M \otimes S)$  i  $(I_N \otimes R)(\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2 \otimes I_p) = (\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2 \otimes I_p)(I_M \otimes R)$ , koje slijede iz osobina Kronekerovog proizvoda.  $\square$

**Primjedba 4.5.** S obzirom da  $x_c \rightarrow X^d d + X^\zeta \zeta$  kada  $t \rightarrow \infty$ , iz strukture matrica  $X^d$  i  $X^\zeta$  se može zaključiti da  $\hat{\zeta} \rightarrow -(\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2 \otimes I_r) \zeta$ . To znači da stanja distribuiranog opserversa konver-

giraju ka konveksnoj kombinaciji stanja lidera, pri čemu su koeficijenti linearne kombinacije u potpunosti determinisani topologijom mreže, tj. Laplasijanom grafa. Pored toga, može se uočiti da stanja lokalnih opservera  $\hat{x}_i$  i  $\hat{d}_i$  asimptotski konvergiraju ka stvarnim vrijednostima stanja  $x_i$  i  $d$ , respektivno. Konačno, stanja pratilaca u stacionarnom stanju konvergiraju ka vrijednostima koje zavise kako od mrežne topologije, tako i od rješenja regulatorskih jednačina (4.4).

### 4.3.1 Analiza stabilnosti

U ovom dijelu će biti izveden lokalni uslov za stabilnost, čija ispunjenost na nivou svakog agenta garantuje stabilnost matrice  $A_c$ .

Najprije definišimo matrice

$$H = \begin{bmatrix} A & E \\ 0 & \bar{D} \end{bmatrix}, L^{xd} = \begin{bmatrix} L^x \\ L^d \end{bmatrix}, G = - \begin{bmatrix} C & Q \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A + BK^x & BK^\zeta \\ L^\zeta (\tilde{\mathcal{L}}_1 - I)C & \tilde{S} + L^\zeta \tilde{R} \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

**Lema 4.5.** *Matrica stanja spregnutog sistema  $A_c$  je Hurwitz stabilna ako i samo ako su matrice  $H + L^{xd}G$  i  $\tilde{A}$  Hurwitz stabilne.*

*Dokaz.* Posmatrajmo matricu  $\tilde{A}_c$ , koja se dobija transformacijom sličnosti  $\tilde{A}_c = T^{-1}A_cT$ , gdje je transformaciona matrica  $T$  jednaka

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ I & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Lako se pokazuje da je

$$\tilde{A}_c = \begin{bmatrix} A + BK^x & BK^x & BK^d & BK^\zeta \\ 0 & A - L^x C & E - L^x Q & 0 \\ 0 & -L^d C & \bar{D} - L^d Q & 0 \\ L^\zeta (\tilde{\mathcal{L}}_1 - I)C & 0 & 0 & \tilde{S} + L^\zeta \tilde{R} \end{bmatrix}.$$

Promjenom redosljeda vrsta i kolona matrice  $\tilde{A}_c$  se dobija

$$\tilde{A}_c \sim \begin{bmatrix} H + L^{xd}G & 0 \\ \star & \tilde{A} \end{bmatrix}.$$

Iz posljednje relacije se može zaključiti da će matrica  $\tilde{A}_c$  biti Hurwitz stabilna samo ako su matrice  $\tilde{A}$  i  $H + L^{xd}G$  Hurwitz stabilne.  $\square$

Stabilnost matrice  $H + L^{xd}G$  se može osigurati na relativno jednostavan način. Naime, jasno je da će matrica  $H + L^{xd}G$  biti stabilna ukoliko su matrice  $H_i + L_i^{xd}G_i$ ,  $\forall i \in \mathbb{F}$ , stabilne, gdje je

$$H_i = \begin{bmatrix} A_i & E_i \\ 0 & D \end{bmatrix}, G_i = - \begin{bmatrix} C_i & Q_i \end{bmatrix}, L_i^{xd} = \begin{bmatrix} L_i^x \\ L_i^d \end{bmatrix}, i \in \mathbb{F}.$$

Kako su parovi  $(G_i, H_i)$  detektabilni (Pretpostavka 4.5), to znači da uvijek postoje pojačanja  $L_i^{xd}$  za koja će matrice  $H_i + L_i^{xd}G_i$  biti Hurwitz stabilne.

Stabilizacija matrice  $\tilde{A}$  predstavlja kompleksniji zadatak i zahtijeva dodatnu analizu. Uvedimo virtuelni sistem opisan sljedećim matricama u prostoru stanja

$$\hat{A}_i = \begin{bmatrix} A_i + B_i K_i^x & B_i K_i^\zeta \\ 0 & S + L_i^\zeta R \end{bmatrix}, \hat{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ L_i^\zeta \end{bmatrix}, \hat{C}_i = \begin{bmatrix} C_i & 0 \end{bmatrix},$$

i funkcijom prenosa

$$T_i(s) = \hat{C}_i (sI - \hat{A}_i)^{-1} \hat{B}_i.$$

Sada možemo prezentovati sljedeću teoremu.

**Teorema 4.2.** *Matrica  $\tilde{A}$  je stabilna ako je zadovoljen uslov*

$$\|T_i\|_\infty < \gamma^*, \forall i \in \mathbb{F}, \quad (4.20)$$

gdje je  $\gamma^* = \frac{1}{\rho(I - \tilde{L}_1)}$ .

*Dokaz.* Matrica  $\tilde{A}$  se može zapisati u obliku  $\tilde{A} = \hat{A} + \hat{B}(\tilde{L}_1 - I)\hat{C}$ , gdje je

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A + BK^x & BK^\zeta \\ 0 & \tilde{S} + L^\zeta \tilde{R} \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ L^\zeta \end{bmatrix}, \hat{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}.$$

Pretpostavimo da je  $\hat{A}$  Hurwitz stabilna matrica. Na osnovu *matrix determinant* leme [71] se



može zapisati

$$\begin{aligned} \det(sI - \tilde{A}) &= \det(sI - \hat{A}) \det(I - (sI - \hat{A})^{-1} \hat{B} (\tilde{\mathcal{L}}_1 - I) \hat{C}) \\ &= \det(sI - \hat{A}) \det(I + (I - \tilde{\mathcal{L}}_1) \hat{C} (sI - \hat{A})^{-1} \hat{B}). \end{aligned}$$

Po definiciji, matrica  $\tilde{A}$  je Hurwitz stabilna ako važi uslov  $\det(sI - \tilde{A}) \neq 0$ ,  $\forall s \in \bar{\mathbb{C}}^+$ , koji će sigurno biti zadovoljen ukoliko je

$$\sup_{s \in \bar{\mathbb{C}}^+} \rho((I - \tilde{\mathcal{L}}_1) \hat{C} (sI - \hat{A})^{-1} \hat{B}) < 1.$$

Lako se može pokazati da važi jednakost  $\hat{C} (sI - \hat{A})^{-1} \hat{B} = \text{diag}(T_i(s))$ , iz koje dalje slijedi da je  $\rho((I - \tilde{\mathcal{L}}_1) \hat{C} (sI - \hat{A})^{-1} \hat{B}) = \rho((I - \tilde{\mathcal{L}}_1) \text{diag}(T_i(s)))$ . Na osnovu *block-norm matrix* nejednakosti [70] dalje se dobija

$$\begin{aligned} \rho((I - \tilde{\mathcal{L}}_1) \text{diag}(T_i(s))) &\leq \rho(|I - \mathcal{L}_1| \text{diag}(\|T_i\|_\infty)) \\ &\leq \rho(|I - \mathcal{L}_1|) \max_i \|T_i\|_\infty < 1. \end{aligned}$$

Budući da je  $\rho(|I - \mathcal{L}_1|) = \rho(I - \mathcal{L}_1) = 1/\gamma^*$ , množenjem obje strane posljednje nejednakosti sa  $\gamma^*$  dobija se lokalni uslov stabilnosti (4.20).  $\square$

**Primjedba 4.6.** U slučaju kada pratioci imaju identičnu dinamiku, polazeći od uslova (4.20), moguće je izvesti različite uslove stabilnosti za pojedinačne agente, pri čemu bi uslov za stabilnost  $i$ -tog agenta zavisio od  $i$ -te sopstvene vrijednosti matrice  $(I - \mathcal{L}_1)$  [115]. Međutim, u praktičnim scenarijima sopstvene vrijednosti Laplasijana grafa su rijetko poznate, dok se vrijednost  $\rho(I - \mathcal{L}_1)$  može estimirati. Ukoliko i lideri i pratioci imaju identičnu dinamiku, onda nema potrebe da se implementira distribuirani opserver za estimaciju konveksne kombinacije stanja lidera. Tada je moguće primijeniti jednostavnije protokole za rješavanje OCC problema, poput protokola predloženog u [29]. Takođe, važno je istaći da se predloženi protokol može primijeniti na sisteme čiju je ulazno-izlaznu dinamiku moguće linearizovati, poput Ojler-Lagranžovih sistema i neholonomnih mobilnih robota [13, 20, 29, 40, 96, 105].

### 4.3.2 Sinteza kontrolera

U ovom potpoglavlju će biti prezentovan metod za određivanje parametara kontrolera na takav način da matrica  $A_c$  bude stabilna. Lema 4.5 tvrdi da će matrica  $A_c$  biti stabilna ukoliko su matrice  $H + L^{xd}G$  i  $\tilde{A}$  stabilne. Stabilizacija blok matrice  $H + L^{xd}G$  se svodi na stabilizaciju

njenih pojedinačnih blokova  $H_i + L_i^{xd} G_i$ , dok će matrica  $\tilde{A}$  biti stabilna ukoliko je za svakog agenta zadovoljen uslov (4.20) iz Teoreme 4.2. Međutim, poznato je da u opštem slučaju  $\mathcal{H}_\infty$  norma funkcije prenosa ne može imati proizvoljno malu vrijednost, pa će iz tog razloga naprije biti uspostavljena donja granica vrijednosti  $\|T_i\|_\infty$ .

**Lema 4.6.** *Neka je funkcija prenosa  $T_i(s)$  stabilna. Tada je  $\mathcal{H}_\infty$  norma  $\|T_i\|_\infty$  konačna i važi sljedeća nejednakost:*

$$\|T_i\|_\infty \geq 1, \quad i \in \mathbb{F}. \quad (4.21)$$

*Dokaz.* Nakon transformacije sličnosti  $\check{A}_i = M_i \hat{A}_i M_i^{-1}$ ,  $\check{B}_i = M_i \hat{B}_i$ ,  $\check{C}_i = \hat{C}_i M_i^{-1}$ , gdje je transformaciona matrica  $M_i$  jednaka

$$M_i = \begin{bmatrix} I & -\Pi_i^\zeta \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

dobijaju se sljedeće matrice sistema u prostoru stanja

$$\begin{aligned} \check{A}_i &= \begin{bmatrix} A_i + B_i K_i^x & -\Pi_i^\zeta L_i^\zeta R \\ 0 & S + L_i^\zeta R \end{bmatrix}, \\ \check{B}_i &= \begin{bmatrix} -\Pi_i^\zeta L_i^\zeta \\ L_i^\zeta \end{bmatrix}, \quad \check{C}_i = \begin{bmatrix} C_i & R \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Pretpostavimo da važi nejednakost  $\|T_i\|_\infty < 1$ . Tada, na osnovu teoreme malog pojačanja, znamo da se sistem (4.22) može stabilizovati negativnom jediničnom povratnom spregom. Rezultirajuća matrica stanja spregnutog sistema je u tom slučaju

$$\check{A}_i - \check{B}_i \check{C}_i = \begin{bmatrix} A_i + B_i K_i^x + \Pi_i^\zeta L_i^\zeta C_i & 0 \\ -L_i^\zeta C_i & S \end{bmatrix},$$

za koju se lako može zaključiti da je nestabilna. Samim tim, jasno je da mora važiti nejednakost (4.21).  $\square$

Matrica  $\hat{A}_i$  (kao i matrica  $\check{A}_i$ ) ima gornje trougaonu stukturu, pa je samim tim jednostavno naći pojačanja  $K_i^x$  i  $L_i^\zeta$  koja stabilizuju njene blokove na glavnoj dijagonali. Međutim, pored toga što treba da bude stabilna, funkcija prenosa  $T_i(s)$  treba da zadovolji i uslov (4.20). S obzirom da je pojačanje  $L_i^\zeta$  inkorporirano u matrici  $\hat{B}_i$  (kao i matrici  $\check{B}_i$ ), istovremeno određivanje pojačanja  $K_i^x$  i  $L_i^\zeta$  u cilju zadovoljenja uslova (4.20) predstavlja isuviše kompleksan zadatak.

Iz tog razloga će u prvom koraku biti određeno pojačanje  $L_i^\zeta$  tako da matrica  $S + L_i^\zeta R$  bude Hurwitz stabilna matrica. Nakon računanja  $L_i^\zeta$ , u drugom koraku će se pristupiti određivanju pojačanja  $K_i^x$  tako da uslov (4.20) bude zadovoljen.

**Primjedba 4.7.** Pretpostavka 4.5 garantuje postojanje pojačanja  $L_i^\zeta$  za koje je matrica  $S + L_i^\zeta R$  stabilna. Za određivanje matrice  $L_i^\zeta$  se mogu koristiti klasične tehnike za postavljanje polova, poput Akermanove formule. Međutim, proizvoljno postavljanje polova može stvoriti poteškoće u procesu stabilizacije matrice  $\tilde{A}$ , budući da vrijednost  $\|T_i\|_\infty$  zavisi od vrijednosti matrice  $L_i^\zeta$ . Iz ovog razloga će u nastavku biti prezentovan metod za računanje pojačanja  $L_i^\zeta$  koji se zasniva na rješavanju parametarske ARE i koji kasnije pruža više slobode za određivanje pojačanja  $K_i^x$ .

Funkcija prenosa  $T_i(s) = \hat{C}_i(sI - \hat{A}_i)^{-1} \hat{B}_i$  se može zapisati u razvijenom obliku na sljedeći način

$$\begin{aligned} T_i(s) = & -C_i(sI - (A_i + B_i K_i^x))^{-1} \Pi_i^\zeta L_i^\zeta \\ & + (I - C_i(sI - (A_i + B_i K_i^x))^{-1} \Pi_i^\zeta L_i^\zeta) \tilde{T}_i(s), \end{aligned} \quad (4.23)$$

gdje je  $\tilde{T}_i(s) = R(sI - (S + L_i^\zeta R))^{-1} L_i^\zeta$ . Sistemu čija je funkcija prenosa  $\tilde{T}_i(s)$  odgovara realizacija u prostoru stanja

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i = (S + L_i^\zeta R) \xi_i + L_i^\zeta v_i \\ \eta_i = R \xi_i. \end{cases} \quad (4.24)$$

U nastavku slijede dvije leme koje se odnose na  $\tilde{T}_i(s)$ , a samim tim na funkciju prenosa  $T_i(s)$ .

**Lema 4.7.** Neka važe Pretpostavke 4.2 i 4.5. Tada, za svako  $\tilde{\gamma}_i > 1$  postoji matrica pojačanja  $L_i^\zeta$  takva da važi  $\|\tilde{T}_i\|_\infty < \tilde{\gamma}_i$ . Pojačanje  $L_i^\zeta$  se može odrediti iz relacije  $L_i^\zeta = -\tilde{P}_i R^T$ , gdje je  $\tilde{P}_i > 0$  rješenje algebarske Rikatijeve jednačine (ARE):

$$P_i S^T + S \tilde{P}_i + (\tilde{\gamma}_i^{-2} - 1) \tilde{P}_i R^T R \tilde{P}_i + \tilde{\epsilon}_i I = 0, \quad (4.25)$$

pri čemu je  $\tilde{\epsilon}_i > 0$  proizvoljan parametar.

*Dokaz.* Na osnovu bounded real leme (BRL) znamo da je matrica  $S + L_i^\zeta R$  Hurwitz stabilna i da važi  $\|\tilde{T}_i\|_\infty < \tilde{\gamma}_i$  ukoliko postoji matrica  $\tilde{P}_i > 0$  za koju je zadovoljena nejednakost

$$\tilde{P}_i (S + L_i^\zeta R)^T + (S + L_i^\zeta R) \tilde{P}_i + \tilde{\gamma}_i^{-2} L_i^\zeta L_i^{\zeta T} + \tilde{P}_i R^T R \tilde{P}_i < 0.$$

Za  $L_i^\zeta = -\tilde{P}_i R^T$ , prethodna nejednakost se svodi na

$$\tilde{P}_i S^T + S \tilde{P}_i + (\tilde{\gamma}_i^{-2} - 1) \tilde{P}_i R^T R \tilde{P}_i < 0. \quad (4.26)$$

Matrica  $S$  ima sopstvene vrijednosti sa nenegativnim realnim dijelom, što znači da ne postoji matrica  $\tilde{P}_i > 0$  koja zadovoljava nejednakost (4.26) dok god je  $\tilde{\gamma}_i^{-2} - 1 \geq 0$ . Iz prethodnog se može zaključiti da  $\tilde{\gamma}_i$  mora zadovoljavati uslov  $\tilde{\gamma}_i > 1$ .

Na kraju, primijetimo da će nejednakost (4.26) važiti za bilo koje  $\tilde{P}_i > 0$  koje je ujedno rješenje ARE (4.25). Postojanje takvog  $\tilde{P}_i$  je zagarantovano detektabilnošću para  $(R, S)$  [82].  $\square$

Važno je napomenuti da se pored relacije  $L_i^\zeta = -\tilde{P}_i R^T$ , za određivanje pojačanja  $L_i^\zeta$  mogu koristiti i drugi izrazi koji zavise od  $\tilde{P}_i$ . Međutim, upravo ovakav način računanja  $L_i^\zeta$  omogućava postizanje najmanje moguće vrijednosti  $\mathcal{H}_\infty$  norme funkcije prenosa  $\tilde{T}_i(s)$ . Vrijednost ove najmanje norme će biti izvedena u nastavku.

**Lema 4.8.** Za sistem  $\tilde{T}_i(s)$ , čija je realizacija u prostoru stanja data jednačinom (4.24), važi nejednakost  $\|\tilde{T}_i\|_\infty \geq 1$ .

*Dokaz.* Ukoliko primijenimo upravljački zakon  $v_i = -\eta_i$  na sistem (4.24), matrica stanja spregnutog sistema će biti jednaka  $S$ . Kako je  $S$  anti-Hurwitz stabilna matrica (Pretpostavka 4.2), na osnovu teoreme malog pojačanja možemo zaključiti da mora važiti nejednakost  $\|\tilde{T}_i\|_\infty \geq 1$ .  $\square$

**Primjedba 4.8.** Leme 4.7 i 4.8 impliciraju da uvijek postoji matrica pojačanja  $L_i^\zeta$  takva da je  $\|\tilde{T}_i\|_\infty \in [1, \tilde{\gamma}_i)$ , pri čemu vrijednost parametra  $\tilde{\gamma}_i > 1$  može biti izabrana proizvoljno blizu 1.

**Primjedba 4.9.** Pretpostavimo da je  $\tilde{\gamma}_i = 1 + \Delta_i$ , pri čemu je  $0 < \Delta_i \ll 1$ . Tada na osnovu Primjedbe 4.8 možemo zaključiti da  $\|\tilde{T}_i\|_\infty \rightarrow 1^+$  za bilo koje  $\tilde{\epsilon}_i$ . S druge strane, poznato je da je matrica  $\tilde{P}_i(\tilde{\epsilon}_i)$ , koja predstavlja rješenje algebarske Rikatijske jednačine (4.25), monotono neopadajuća sa  $\tilde{\epsilon}_i$  [116]. To znači da će se smanjivanjem parametra  $\tilde{\epsilon}_i$  smanjivati i pojačanje  $L_i^\zeta$ . Samim tim, na osnovu izraza (4.23) se može zaključiti da će se smanjivati i vrijednost  $\mathcal{H}_\infty$  norme  $\|T_i\|_\infty$ . Na ovaj način se može obezbijediti veća fleksibilnost za izbor odgovarajućeg pojačanja  $K_i^x$ .

Nakon određivanja pojačanja  $L_i^\zeta$  u skladu sa postupkom opisanom u Lemi 4.7, u sljedećem koraku je potrebno pronaći pojačanje  $K_i^x$  takvo da funkcija prenosa  $T_i(s)$  bude stabilna i da

uslov (4.20) bude zadovoljen. Da bi pristupili rješavanju ovog problema, zapišimo matricu  $\hat{A}_i$  u obliku  $A_i = \bar{A}_i + \bar{B}_i K_i^x \bar{C}_i$ , gdje je

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i \Gamma_i^\zeta \\ 0 & S + L_i^\zeta R \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_i = \begin{bmatrix} I & -\Pi_i^\zeta \end{bmatrix}.$$

Funkcija prenosa  $T_i(s)$  se onda može izraziti na sljedeći način  $T_i(s) = \hat{C}_i(sI - \bar{A}_i - \bar{B}_i K_i^x \bar{C}_i)^{-1} \hat{B}_i$ . Na ovaj način se postupak za određivanje pojačanja  $K_i^x$  svodi na rješavanje klasičnog  $\mathcal{H}_\infty$  *Static Output Feedback* (SOF) problema. U literaturi su predložene brojne metode za rješavanje  $\mathcal{H}_\infty$  SOF problema, pri čemu Iterativni LMI (ILMI) metod [78] predstavlja jedan od najefektivnijih pristupa. Postupak za određivanje pojačanja  $K_i^x$  pomoću ILMI metoda je prezentovan u Algoritmu 4.1, pri čemu je uveden pomoćni parametar  $\gamma_i \leq \gamma^*$  koji pruža dodatnu slobodu pri podešavanju gornje granice  $\mathcal{H}_\infty$  norme  $\|T_i\|_\infty$ .

Da bi  $\mathcal{H}_\infty$  SOF problem bio rješiv potrebno je da par  $(\bar{A}_i, \bar{B}_i)$  bude stabilizabilan, dok par  $(\bar{C}_i, \bar{A}_i)$  treba da bude detektabilan. Imajući u vidu činjenicu da je  $S + L_i^\zeta R$  Hurwitz stabilna matrica, iz strukture matrica  $\bar{A}_i$  i  $\bar{B}_i$  se lako zaključuje da stabilizabilnost para  $(A_i, B_i)$  implicira stabilizabilnost para  $(\bar{A}_i, \bar{B}_i)$ . Slično, detektabilnost para  $(C_i, A_i)$  implicira detektabilnost para  $(\bar{C}_i, \bar{A}_i)$ . Nakon određivanja pojačanja  $K_i^x$  pomoću Algoritma 4.1, preostala pojačanja  $K_i^d$  i  $K_i^\zeta$  se računaju na osnovu relacija (4.15).

Na kraju, nakon što se pronađu odgovarajuća pojačanja  $L_i^\zeta$  i  $K_i^x$  i time zadovolji uslov (4.20), u posljednjem koraku je potrebno odrediti pojačanje  $L_i^{xd}$  tako da matrica  $H_i + L_i^{xd} G_i$  bude Hurwitz stabilna za svako  $i \in \mathbb{F}$ . Za rješavanje ovog problema se može koristiti standardni ARE metod [85]. Konkretno, pojačanje  $L_i^{xd}$  se određuje iz relacije  $L_i^{xd} = -P_i G_i^T$ , gdje je matrica  $P_i > 0$  jedinstveno rješenje ARE

$$H_i P_i + P_i H_i^T - P_i G_i^T G_i P_i + \epsilon_i I = 0, \quad (4.27)$$

pri čemu je  $\epsilon_i > 0$ .

Konačno, radi bolje preglednosti, procedura za dizajn parametara kontrolera je prezentovana u Algoritmu 4.2.

---

**Algoritam 4.1**  $\mathcal{H}_\infty$  Static Output Feedback (SOF) algoritam za određivanje pojačanja OCC kontrolera

---

- 1: Izvršiti inicijalizaciju  $\mathcal{P}_0 = I$  i  $\mathcal{Q}_0 = I$ .
- 2: Odrediti  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{V}_1$ ,  $\mathcal{V}_2$  rješavanjem sljedećeg optimizacionog problema:

$$\begin{aligned} & \min \quad \text{trace}(\mathcal{P}\mathcal{Q}_0 + \mathcal{Q}\mathcal{P}_0), \text{ pod uslovima} \\ & \begin{pmatrix} \mathcal{P}\bar{A}_i + \bar{A}_i^T\mathcal{P} + \mathcal{V}_1\bar{C}_i + \bar{C}_i^T\mathcal{V}_1^T & \mathcal{P}\bar{B}_i & \bar{C}_i^T \\ \bar{B}_i^T\mathcal{P} & -\gamma_i I & 0 \\ \bar{C}_i & 0 & -\gamma_i I \end{pmatrix} < 0, \\ & \begin{pmatrix} \bar{A}_i\mathcal{Q} + \mathcal{Q}\bar{A}_i^T + \bar{B}_i\mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_2^T\bar{B}_i^T & \bar{B}_i & \mathcal{Q}\bar{C}_i^T \\ \bar{B}_i^T & -\gamma_i I & 0 \\ \bar{C}_i\mathcal{Q} & 0 & -\gamma_i I \end{pmatrix} < 0, \\ & \begin{pmatrix} \mathcal{P} & 0 \\ 0 & \mathcal{Q} \end{pmatrix} \geq 0, \mathcal{P} > 0, \mathcal{Q} > 0. \end{aligned}$$

- 3: Provjeriti sljedeće uslove:
  1. ako je  $\text{trace}(\mathcal{P}\mathcal{Q}) - n_i < \delta_1$ , gdje je  $\delta_1$  zadata tolerancija, preći na Korak 4.
  2. ako je  $\text{trace}(\mathcal{P}\mathcal{Q}) - \text{trace}(\mathcal{P}_0\mathcal{Q}_0) < \delta_2$ , gdje je  $\delta_2$  zadata tolerancija, matrica  $\mathcal{P}$  nije pronađena, EXIT
  3. u suprotnom, podesiti  $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}$  i preći na Korak 2.
- 4: Podesiti  $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$ . Za zadatu matricu  $\mathcal{P}$ , odrediti  $K_i^x$  rješavanjem sljedećeg optimizacionog problema

$$\begin{aligned} & \min \quad \alpha, \text{ pod uslovom} \\ & \Phi = \mathcal{P}\bar{A}_i + \bar{A}_i^T\mathcal{P} + \mathcal{P}\bar{B}_i K_i^x + \bar{C}_i^T K_i^{xT} \bar{B}_i^T \mathcal{P} - \alpha\mathcal{P} \\ & \begin{pmatrix} \Phi & \mathcal{P}\bar{B}_i & \bar{C}_i^T \\ \bar{B}_i^T\mathcal{P} & -\gamma_i I & 0 \\ \bar{C}_i & 0 & -\gamma_i I \end{pmatrix} < 0. \end{aligned}$$

- 5: ako je  $\alpha \leq 0$ , stabilizujuće pojačanje  $K_i^x$  je pronađeno, EXIT.
- 6: Za zadatu matricu  $K_i^x$ , odrediti  $\mathcal{P}$  rješavanjem sljedećeg optimizacionog problema:

$$\min \quad \alpha, \text{ pod uslovom iz Koraka 4.}$$

- 7: ako je  $\alpha \leq 0$ , stabilizujuće pojačanje  $K_i^x$  je pronađeno, EXIT.
- 8: Za zadatu matricu  $K_i^x$  i parametar  $\alpha$ , odrediti  $\mathcal{P}$  rješavanjem sljedećeg optimizacionog problema:

$$\min \text{trace}(\mathcal{P}) \quad \text{pod uslovom iz Koraka 4.}$$

- 9: Provjeriti sljedeće uslove:
    1. ako je  $\|\mathcal{P} - \mathcal{P}_0\| / \|\mathcal{P}\| < \delta$ , rješenje nije pronađeno, EXIT
    2. u suprotnom, vratiti se na Korak 4
-

---

**Algoritam 4.2** Sinteza OCC kontrolera

13

- 1: Inicijalizovati parametre  $1 < \gamma_i \leq \gamma^*$ ,  $\tilde{\gamma}_i > 1$ ,  $\epsilon_i > 0$  i  $\tilde{\epsilon}_i > 0$ .
- 2: Izračunati  $L_i^\zeta = -\tilde{P}_i R^T$ , gdje je matrica  $\tilde{P}_i > 0$  rješenje ARE

$$S\tilde{P}_i + \tilde{P}_i S^T + (\tilde{\gamma}_i^{-2} - 1)\tilde{P}_i R^T R \tilde{P}_i + \tilde{\epsilon}_i I = 0.$$

- 3: Odrediti pojačanje  $K_i^x$  pomoću Algoritma 4.1 za  $\gamma_i < \gamma^*$ . Nakon toga, izračunati  $K_i^\zeta = \Gamma_i^\zeta - K_i^x \Pi_i^\zeta$  i  $K_i^d = \Gamma_i^d - K_i^x \Pi_i^d$ .
- 4: Ukoliko Algoritam 4.1 ne daje stabilizujuće rješenje, vratiti se na Korak 1 i smanjiti vrijednost parametra  $\tilde{\epsilon}_i$  i povećati vrijednost parametra  $\gamma_i$ . Ukoliko Algoritam 4.1 pronalazi stabilizujuće rješenje, ali performanse sistema nisu zadovoljavajuće, vratiti se na Korak 1 i povećati  $\tilde{\epsilon}_i$ . U suprotnom, preći na naredni korak.
- 5: Izračunati  $L_i^{xd} = -P_i G_i^T$ , gdje je matrica  $P_i > 0$  rješenje ARE:

$$H_i P_i + P_i H_i^T - P_i G_i^T G_i P_i + \epsilon_i I = 0.$$


---

## 4.4 Analiza rješivosti

U ovom dijelu će biti uspostavljene teorijske garancije za rješivost OCC problema upravljačkim protokolom (4.10). Analiza će biti sprovedena iz tri različite perspektive: dinamike lidera, dinamike pratilaca i topologije grafa.

### 4.4.1 Analiza rješivosti iz perspektive dinamike lidera

U nastavku će biti pokazano da se rješivost OCC problema protokolom (4.10) uvijek može garantovati ukoliko Pretpostavku 4.2 zamijenimo Pretpostavkom 4.7.

**Pretpostavka 4.7.** Sopstvene vrijednosti matrice  $S$  se nalaze na imaginarnoj osi, tj.  $\text{Re}(\lambda(S)) = 0$ .

**Posljedica 4.1.** Neka važe Pretpostavke 4.1, 4.3-4.7. Tada se OCC problem za MAS (4.1)-(4.3) uvijek može riješiti upravljačkim protokolom (4.10).

*Dokaz.* Kao što je već pomenuto u Primjedbi 4.9, matrica  $\tilde{P}_i(\tilde{\epsilon}_i)$ , koja predstavlja rješenje ARE (4.25), je monotono neopadajuća sa  $\tilde{\epsilon}_i$ . U specijalnom slučaju kada važi Pretpostavka 4.7, tj. kada matrica  $S$  ima sopstvene vrijednosti u  $\bar{\mathbb{C}}^-$ , za  $\tilde{\epsilon}_i \rightarrow 0$  se dobija da  $\tilde{P}_i \rightarrow 0$  [85], što dalje implicira da  $L_i^\zeta \rightarrow 0$ . Samim tim, za bilo koje pojačanje  $K_i^x$  koje stabilizuje matricu  $A_i + B_i K_i^x$  važiće  $T_i(s) \rightarrow \tilde{T}_i(s)$ , što se može zaključiti iz relacije (4.23). Ukoliko se parametar

$\tilde{\gamma}_i$  u Algoritmu 4.2 odabere tako da teži jedinici, tada će  $\mathcal{H}_\infty$  norma  $\|\tilde{T}_i\|_\infty$ , a samim tim i  $\|T_i\|_\infty$  težiti jedinici. S druge strane, iz Leme 4.2 slijedi da je  $\gamma^* > 1$ , što znači da uslov stabilnosti (4.20) uvijek može biti zadovoljen.  $\square$

**Primjedba 4.10.** Važno je istaći da se sa povećavanjem parametra  $\tilde{\epsilon}_i$  povećavaju  $\tilde{P}_i$  i  $L_i^\zeta$ , što rezultira bržim odzivom sistema. Iako u ovom slučaju i dalje važi  $\|\tilde{T}_i\|_\infty \rightarrow 1^+$ , ostali članovi iz relacije za  $T_i(s)$  postaju nezanemarljivi, što dovodi do povećanja  $\mathcal{H}_\infty$  norme  $\|T_i\|_\infty$ . Samim tim, u Algoritmu 4.2 parametar  $\gamma_i$  treba inicijalizovati na veću vrijednost, koju u narednim iteracijima postepeno treba smanjivati sve dok Algoritam 4.1 ne pronađe odgovarajuće pojačanje.

#### 4.4.2 Analiza rješivosti iz perspektive dinamike pratilaca

U ovom dijelu će biti usvojena pretpostavka da pratiodci imaju minimalno faznu i desno invertabilnu dinamiku. S druge strane, ne postavljaju se ograničenja po pitanju dinamike lidera.

**Pretpostavka 4.8.** Matrice  $A_i$ ,  $B_i$  i  $C_i$  zadovoljavaju uslov

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A_i - sI & B_i \\ C_i & 0 \end{pmatrix} = n_i + p, \forall s \in \bar{\mathbb{C}}^+,$$

za svako  $i \in \mathbb{F}$ .

**Primjedba 4.11.** Pretpostavka da je dinamika  $i$ -tog podsistema desno invertabilna znači da postoje početni uslov  $x_i(0)$  i upravljački zakon  $u_i(t)$  za koje je izlaz  $y_i(t)$  jednak referentnom signalu, za svako  $t \geq 0$ . Primjer desno invertabilnog sistema je sistem sa jednim ulazom i jednim izlazom (eng. *single-input single-output*, SISO) čija funkcija prenosa nije identički jednaka nuli [65]. Potrebno je napomenuti da je Pretpostavka 4.6 sadržana u okviru Pretpostavke 4.8.

Definišimo funkciju prenosa  $F_i(s) = C_i(sI - (A_i + B_i K_i^x))^{-1} \Pi_i^\zeta L_i^\zeta$ . Funkcija prenosa (4.23) se onda može zapisati na sljedeći način  $T_i(s) = -F_i(s)(I + \tilde{T}_i(s)) + \tilde{T}_i(s)$ .

**Posljedica 4.2.** Neka važe Pretpostavke 4.1-4.5 i 4.8. Tada se OCC problem za MAS (4.1)-(4.3) uvijek može riješiti upravljačkim protokolom (4.10).

*Dokaz.* Desna invertabilnost trojke matrica  $(A_i, B_i, C_i)$  implicira lijevu invertabilnost trojke matrica  $(A_i^T, C_i^T, B_i^T)$ . Ukoliko važe Pretpostavke 4.4 i 4.8, iz Leme 3.1 [117] slijedi da je



za svako  $f_i > 0$  uvijek moguće odrediti pojačanje  $K_i^x$  za koje je  $\|F_i^T\|_\infty \leq f_i$ , pri čemu je  $F_i^T(s) = (\Pi_i^\zeta L_i^\zeta)^T (sI - (A_i + B_i K_i^x)^T)^{-1} C_i^T$ . Budući da je  $\|F_i^T\|_\infty = \|F_i\|_\infty$ , lako se može zaključiti da  $\mathcal{H}_\infty$  norma  $\|F_i\|_\infty$  može imati proizvoljno malu vrijednost. Koristeći standardne osobine normi, može se pokazati da je  $\|\tilde{T}_i\|_\infty \leq \|F_i\|_\infty \|I + \tilde{T}_i\|_\infty + \|\tilde{T}_i\|_\infty$ . Samim tim, sabirak  $\|F_i\|_\infty \|I + \tilde{T}_i\|_\infty$  može imati proizvoljno malu vrijednost, pa se uslov stabilnosti (4.20) može svesti na uslov  $\|\tilde{T}_i\|_\infty < \gamma^*$ , koji može biti zadovoljen za bilo koje  $1 < \tilde{\gamma}_i < \gamma^*$  (pogledati Primjedbu 4.8).  $\square$

**Primjedba 4.12.** Posljedica 4.1 tvrdi da se OCC problem uvijek može riješiti u slučaju kada lideri imaju polove na imaginarnoj osi, nezavisno od dinamike pratilaca. S druge strane, Posljedicom 4.2 je pokazano da se OCC problem može uvijek riješiti u slučaju kada pratioci imaju desno invertabilnu i minimalno faznu dinamiku, nezavisno od toga kakva je dinamika lidera. Iako se u najopštijem slučaju (kada je  $\text{Re}(\lambda(S)) \geq 0$ ) rješivost OCC problema predloženim protokolom ne može unaprijed garantovati, važno je istaći da to ne znači da je OCC problem nerješiv. Štaviše, u praksi je najinteresantniji scenario u kojem matrica  $S$  zadovoljava Pretpostavku 4.7. U ovom slučaju, egzosistem može generisati širok spektar referentnih signala, poput step signala, polinomijalnih signala, sinusoidalnih signala različitih frekvencija, kao i njihove linearne kombinacije [51].

### 4.4.3 Analiza rješivosti za aciklične grafove

U nastavku će biti pokazano da je za rješavanje OCC problema na acikličnim grafovima dovoljno da se obezbijedi stabilnost matrica  $A_i + B_i K_i^x$ ,  $S + L_i^\zeta R$  i  $H_i + L_i^{xd} G_i$ ,  $\forall i \in \mathbb{F}$ .

**Pretpostavka 4.9.** Usmjereni graf  $\mathcal{G}$  je acikličan i sadrži ujedinjeno razapinjuće stablo.

**Posljedica 4.3.** Neka važe Pretpostavke 4.2-4.6 i 4.9. Tada se OCC problem za MAS (4.1)-(4.3) uvijek može riješiti upravljačkim protokolom (4.10).

*Dokaz.* Kod acikličnih usmjerenih grafova čvorovi se uvijek mogu indeksirati tako da matrica Laplasijana grafa  $\mathcal{L}$  bude donje trougaona. Kao posljedica toga, matrica  $\mathcal{L}_1$  će takođe biti donje trougaona, pa će sopstvene vrijednosti matrice  $I - \mathcal{L}_1$  biti jednake nuli. Drugim riječima, vrijednost parametra  $\gamma^*$  u izrazu (4.20) će težiti ka beskonačno. Samim tim, sinteza kontrolera se značajno pojednostavljuje, jer je dovoljno da se pojačanja kontrolera odrede na takav način da  $\mathcal{H}_\infty$  norma  $\|\tilde{T}_i\|_\infty$  bude konačna, što je ekvivalentno stabilizaciji matrica  $A_i + B_i K_i^x$  i  $S + L_i^\zeta R$ . Ovo je uvijek moguće postići pod Pretpostavkama 4.4 i 4.5, respektivno.  $\square$

# Glava 5

## Rezultati simulacija

Ova glava sadrži dva poglavlja u kojima su prezentovani rezultati simulacija koji se odnose na predložene COR i OCC protokole. U okviru COR dijela, analizirani su različiti scenariji, koji obuhvataju agente i egzosteme sa marginalno stabilnom i nestabilnom dinamikom. Takođe, ispitan je uticaj različitih parametara algoritama za dizajn pojačanja kontrolera na performanse multiagentnog sistema. Kada je riječ o OCC protokolu, prezentovana su dva primjera koji obuhvataju agente sa opštom linearnom dinamikom, kao i modele realnih mobilnih robota. Na kraju, dat je i primjer u kojem je izvršeno poređenje između predloženog metoda za sintezu pojačanja protokola i relevantnog metoda iz literature.

### 5.1 COR problem

#### Primjer 1

Posmatrajmo multiagentni sistem koji se sastoji od šest pratilaca i lidera. Dinamika lidera je zadata sljedećim modelom u prostoru stanja

$$\begin{aligned}\dot{\zeta} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \zeta \\ y_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \zeta,\end{aligned}$$

dok je egzosistem koji generiše poremećaj opisan jednačinom

$$d = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} d.$$

Modeli u prostoru stanja pratilaca su dati sljedećim jednačinama:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} d, \\ y_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d, \quad i = \{1, 4\}; \\ \dot{x}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} d, \\ y_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d, \quad i = \{2, 5\}; \\ \dot{x}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -36 & 0 \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} d, \\ y_i = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d, \quad i = \{3, 6\}. \end{cases}$$

Rješenja regulatorskih jednačina za agente  $i = \{1, 4\}$ ,  $i = \{2, 5\}$  i  $i = \{3, 6\}$  su, respektivno:

$$\begin{aligned} \Gamma_i^d &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \Gamma_i^\zeta = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \Pi_i^d = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Pi_i^\zeta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \Gamma_i^d &= \begin{bmatrix} 1 & 2.5 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \Gamma_i^\zeta = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \Pi_i^d = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ -2 & -1.5 \\ 2 & 1.5 \end{bmatrix}, \Pi_i^\zeta = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \\ \Gamma_i^d &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -38 \end{bmatrix}, \Gamma_i^\zeta = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \Pi_i^d = \begin{bmatrix} 0 & -1.5 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \Pi_i^\zeta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mrežna topologija je modelovana usmjerenim grafom koji je definisan matricom

$$\bar{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 & 0 & -0.1 & 0 & -0.8 \\ -0.125 & 1 & -0.125 & 0 & -0.125 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.667 & -0.333 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8 & 0 & 0 & 1 & -0.2 \\ 0 & -0.333 & 0 & 0 & -0.333 & 1 \end{bmatrix}.$$

Parametar  $\mu$  je postavljen na vrijednost  $\mu = 1$ , što daje  $\gamma^* = \rho(\mu I - \bar{\mathcal{L}})^{-1} = 1.51$  za mrežnu topologiju definisanu matricom  $\bar{\mathcal{L}}$ . Da bi osigurali stabilnost multiagentnog sistema, iz Teorema 3.1 i 3.2 slijedi da je parametre upravljačkog zakona potrebno odrediti tako da uslov  $\|T_i\|_\infty < \gamma^*$  bude ispunjen za svako  $i = 1, \dots, N$ .

### ROF protokol

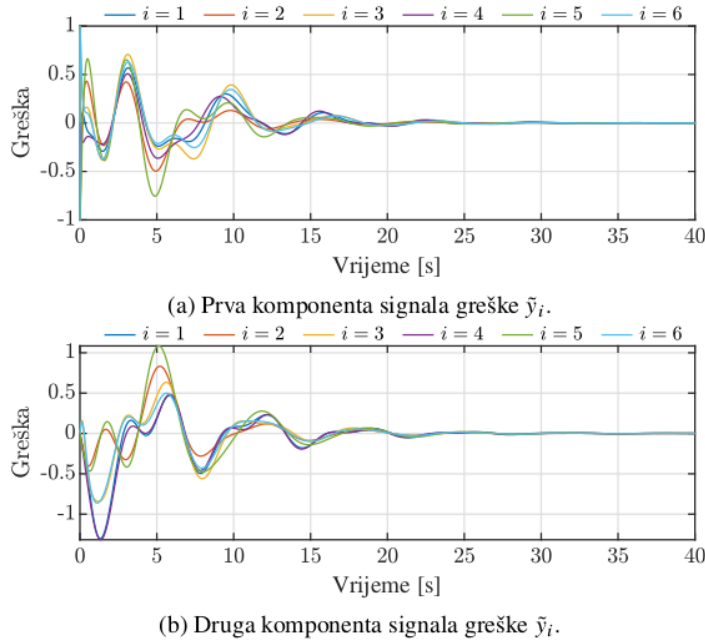
Dizajn parametara upravljačkog protokola se vrši u skladu sa koracima opisanim u Algoritmu 3.2. Najprije se određuju pojačanja opservera rješavanjem ARE (3.22) za  $\epsilon_i = 10$  i  $\delta_i = 0.1$ . Rezultujuća pojačanja su:

$$L_i = \begin{bmatrix} 19.17 & 9.99 & -9.25 & 1.97 & -6.32 & 6.18 \\ -2.59 & 9.09 & -9.30 & 4.91 & -1.49 & -10.94 \end{bmatrix}^T, \quad i = \{1, 4\},$$

$$L_i = \begin{bmatrix} 28.11 & 15.48 & -9.98 & -2.01 & 10.58 & -0.25 & 8.85 \\ -16.60 & 11.01 & 0.32 & 3.48 & -8.48 & 1.25 & -10.95 \end{bmatrix}^T, \quad i = \{2, 5\},$$

$$L_i = \begin{bmatrix} 5.07 & 1.46 & 0.56 & -8.24 & 10.98 & -6.69 & 2.04 \\ -5.81 & -6.55 & 45.76 & -2.40 & 2.41 & -1.31 & -12.22 \end{bmatrix}^T, \quad i = \{3, 6\}.$$

U sljedećem koraku se računaju pojačanja  $K_i^x$  pomoću Algoritma 3.1, koji je realizovan koristeći simbolički optimizacioni *toolbox* YALMIP [118]. Konkretno, za vrijednost parametra



Slika 5.1: Greške agenata u praćenju referentnog signala u slučaju kada se koristi ROF protokol.

$\gamma_i = 1.2$  se dobijaju pojačanja:

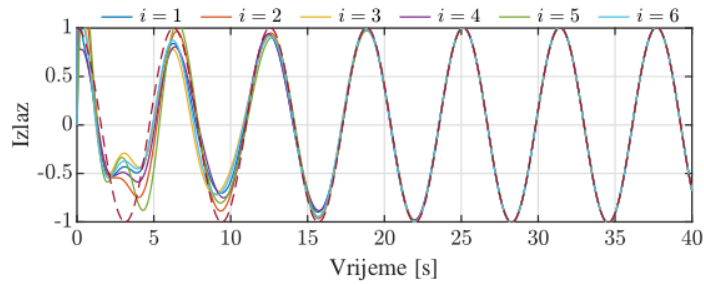
$$K_i^x = \begin{bmatrix} -4.27 & -0.67 \\ -0.67 & 1.78 \end{bmatrix}, i = \{1, 4\},$$

$$K_i^x = \begin{bmatrix} -2.39 & -3.38 & -0.59 \\ 2.55 & 3.50 & -0.15 \end{bmatrix}, i = \{2, 5\},$$

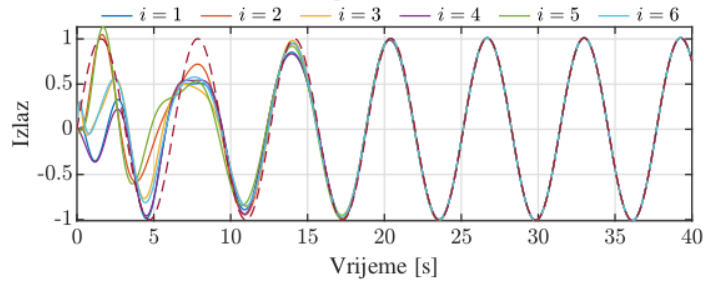
$$K_i^x = \begin{bmatrix} -2.49 & -3.10 & 0.00 \\ 2.39 & 39.35 & -4.71 \end{bmatrix}, i = \{3, 6\}.$$

U posljednjem koraku se računaju pojačanja  $K_i^d$  i  $K_i^c$  na osnovu relacija  $K_i^d = \Gamma_i^d - K_i^x \Pi_i^d$  i  $K_i^c = \Gamma_i^c - K_i^x \Pi_i^c$ , respektivno. Za dobijena pojačanja opservera i kontrolera, rezultujuće  $\mathcal{H}_\infty$  norme iznose:  $\|T_i\|_\infty = 1.14$  za  $i = \{1, 3\}$ ,  $\|T_i\|_\infty = 1.12$  za  $i = \{2, 5\}$  i  $\|T_i\|_\infty = 1.15$  za  $i = \{3, 6\}$ . Kako su vrijednosti normi manje od  $\gamma^*$ , može se zaključiti da je COR problem riješen.

Na slici 5.1 prikazana je greška u praćenju referentnog signala svih pratilaca. Kao što se može vidjeti, ROF protokol obezbjeđuje praćenje referentnog signala i u prisustvu eksternih poremećaja. Sa slike 5.2 se može uočiti da je postignuta sinhronizacija između trajektorija



(a) Prva komponenta izlaza  $y_i$ .



(b) Druga komponenta izlaza  $y_i$ .

Slika 5.2: Izlazi agenata (puna linija) i referentna trajektorija (isprekidana linija) u slučaju kada se koristi ROF protokol.

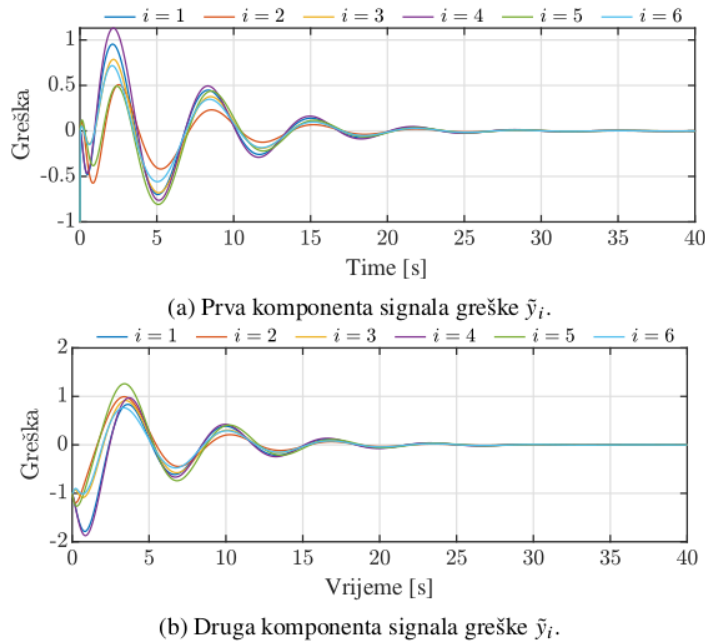
pratilaca i trajektorije lidera.

### OF protokol

Dizajn parametara OF protokola se vrši u skladu sa koracima opisanim u Algoritmu 3.3. Rješavanjem ARE (3.35) za parametre  $\epsilon_i = 10$  i  $\delta_i = 0.1$ , dobijaju se sljedeća pojačanja distribuiranog opserversa:

$$L_i^\zeta = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}, i \in \mathbb{F}.$$

Slično, pojačanja lokalnih opserversa se računaju rješavanjem ARE (3.34) za  $\kappa_i = 1$ . Međutim, radi konciznosti ona ovdje neće biti prikazana. Za vrijednost parametra  $\gamma_i = 1.2$ , Algoritam



Slika 5.3: Greške agenata u praćenju referentnog signala u slučaju kada se koristi OF protokol.

3.1 daje sljedeća pojačanja:

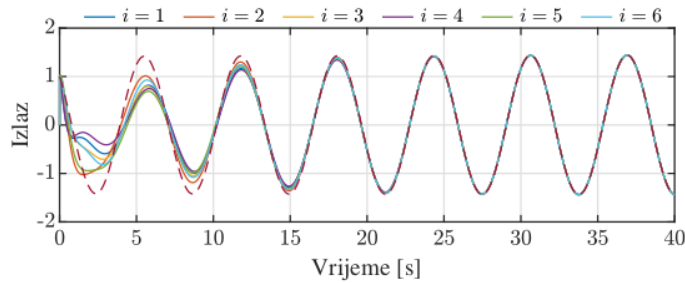
$$K_i^x = \begin{bmatrix} -0.78 & -1.5 \\ -1.5 & 0.78 \end{bmatrix}, \quad i = \{1, 4\},$$

$$K_i^x = \begin{bmatrix} 0.35 & 0.47 & 0.72 \\ 1.88 & 3.00 & 0.57 \end{bmatrix}, \quad i = \{2, 5\},$$

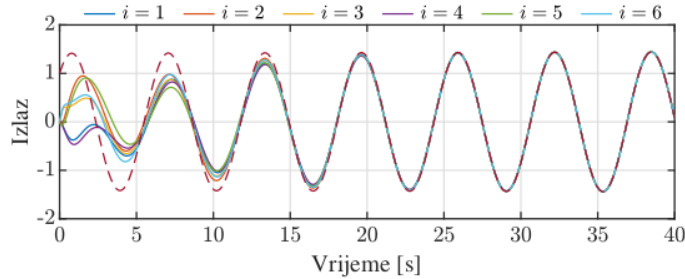
$$K_i^x = \begin{bmatrix} -0.55 & -1.13 & -1.00 \\ 1.55 & 37.96 & 0.44 \end{bmatrix}, \quad i = \{3, 6\}.$$

Preostala pojačanja se određuju na osnovu relacija  $K_i^d = \Gamma_i^d - K_i^x \Pi_i^d$  i  $K_i^z = \Gamma_i^z - K_i^x \Pi_i^z$ . Za izračunata pojačanja opserversa i kontrolera, rezultujuće  $\mathcal{H}_\infty$  norme iznose:  $\|T_i\|_\infty = 1.19$  za  $i = \{1, 3\}$ ,  $\|T_i\|_\infty = 1.18$ , za  $i = \{2, 5\}$  i  $\|T_i\|_\infty = 1.003$  za  $i = \{3, 6\}$ . Kako su vrijednosti rezultujućih normi manje od  $\gamma^*$ , može se zaključiti da je riješen COR problem.

Na slikama 5.3 i 5.4 prikazana je greška u praćenju referentnog signala i trajektorije izlaza u slučaju kada se koristi OF protokol. Može se primijetiti da greške asimptotski konvergiraju ka nuli, dok se izlazi pratilaca sinhronizuju sa referentnom trajektorijom, što znači da je problem regulacije izlaza uspješno riješen.



(a) Prva komponenta izlaza  $y_i$ .



(b) Druga komponenta izlaza  $y_i$ .

Slika 5.4: Izlazi agenata (puna linija) i referentna trajektorija (isprekidana linija) u slučaju kada se koristi OF protokol.

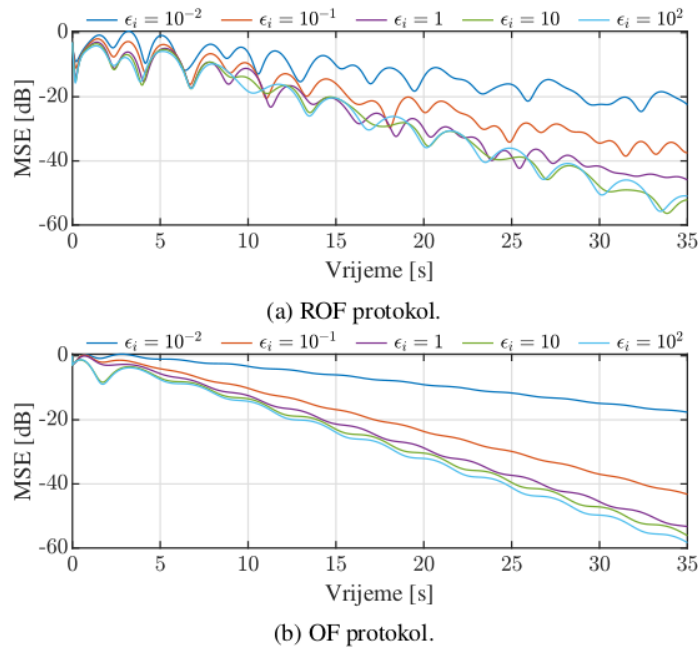
## Primjer 2

U ovom primjeru je izvršena analiza uticaja različitih parametara u Algoritmima 3.2 i 3.3 na performanse sistema. Razmotren je isti model multiagentnog sistema kao u prethodnom primjeru.

U prvom scenariju je varirana vrijednost parametra  $\epsilon_i$ , dok su ostali parametri fiksni i imaju istu vrijednost kao u prethodnom primjeru. Slika 5.5 prikazuje srednju kvadratnu grešku u praćenju referentnog signala za sve agente, koja se dobija na osnovu relacije  $MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{y}_i^T \tilde{y}_i$ . Može se primijetiti da se performanse multiagentnog sistema poboljšavaju sa povećanjem parametra  $\epsilon_i$ . Međutim, za  $\epsilon_i = 10$  i  $\epsilon_i = 100$ , razlika u performansama je gotovo zanemarljiva, što upućuje na zaključak da velike vrijednosti parametra  $\epsilon_i$  neće značajnije poboljšati performanse. Važno je istaći da se povećanjem parametra  $\epsilon_i$  takođe povećavaju i pojačanja  $L_i$  (ROF) i  $L_i^\zeta$  (OF), kao i da za neke velike vrijednosti  $\mathcal{H}_\infty$  SOF algoritam neće biti u mogućnosti da pronađe rješenje ( $10^4$  u ovom primjeru).

U drugom scenariju su razmotrene različite vrijednosti parametra  $\delta_i$ , dok su ostali parametri fiksni, pri čemu su njihove vrijednosti iste kao u prethodnom primjeru. Treba napomenuti da u slučaju kada se koristi ROF protokol,  $\mathcal{H}_\infty$  SOF algoritam nije bio u mogućnosti da pronađe odgovarajuće  $K_i^x$  za vrijednost parametra  $\delta_i = 100$ . Rezultujuće trajektorije MSE su





Slika 5.5: MSE za različite vrijednosti parametra  $\epsilon_i$ .

prikazane na slici 5.6. Važno je primijetiti da u slučaju ROF protokola, signal greške najbrže opada za  $\delta_i = 0.1$ , dok se u slučaju OF protokola najbolje performanse postižu za  $\delta_i = 0.01$ . Iz prethodnog je jasno da se parametar  $\delta_i$  može koristiti za podešavanje performansi, međutim prevelike vrijednosti ovog parametra mogu dovesti do pogoršanja performansi.

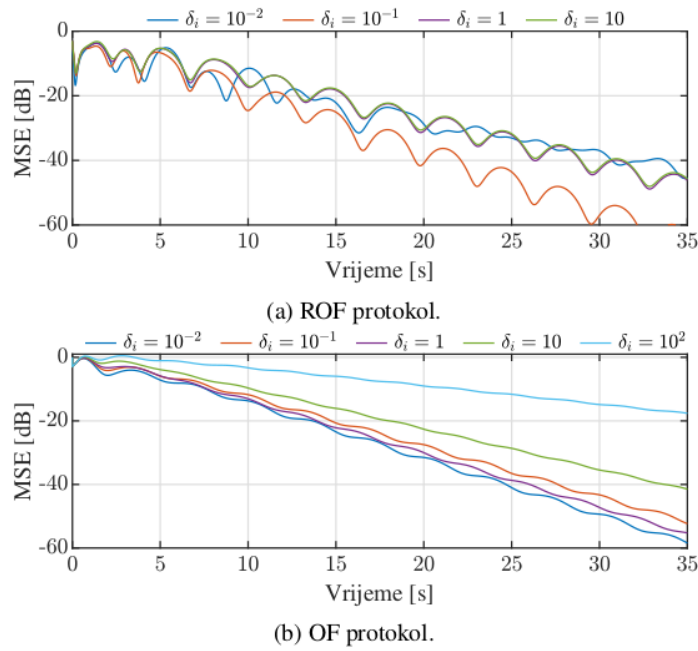
### Primjer 3

U ovom primjeru su razmotreni egzosistemi čiji polovi imaju strogo pozitivne realne djelove, s ciljem da se pokaže da je predloženim metodom moguće riješiti COR problem čak i u situacijama kada njegova rješivost nije teorijski zagarantovana (Primedba 3.9).

Za matrice stanja egzosistema usvojene su vrijednosti

$$S = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0.5 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

dok su modeli pratilaca i parametri Algoritama 3.1-3.3 isti kao u Primjeru 1.



Slika 5.6: MSE za različite vrijednosti parametra  $\delta_i$ .

U slučaju ROF protokola, dobijaju se sljedeća pojačanja i  $\mathcal{H}_\infty$  norme:

$$K_i^x = \begin{bmatrix} -9.35 & -0.38 \\ -0.38 & 5.76 \end{bmatrix}, \|T_i\|_\infty = 1.19, i = \{1, 4\},$$

$$K_i^x = \begin{bmatrix} 1.25 & -1.18 & -1.66 \\ 22.14 & 15.22 & -5.70 \end{bmatrix}, \|T_i\|_\infty = 1.18, i = \{2, 5\},$$

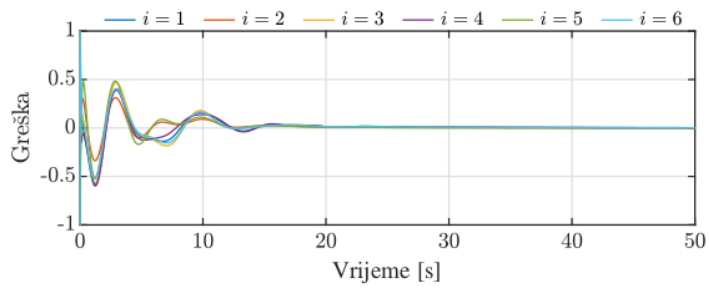
$$K_i^x = \begin{bmatrix} -4.79 & -3.94 & -0.13 \\ 2.61 & 44.70 & -7.03 \end{bmatrix}, \|T_i\|_\infty = 1.20, i = \{3, 6\},$$

dok je u slučaju OF protokola:

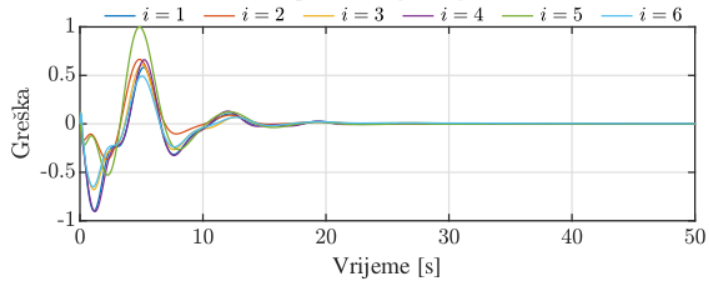
$$K_i^x = \begin{bmatrix} -6.51 & -1.17 \\ -1.17 & 6.44 \end{bmatrix}, \|T_i\|_\infty = 1.12, i = \{1, 4\},$$

$$K_i^x = \begin{bmatrix} 1.55 & -0.47 & -1.54 \\ 7.49 & 4.15 & -4.00 \end{bmatrix}, \|T_i\|_\infty = 1.17, i = \{2, 5\},$$

$$K_i^x = \begin{bmatrix} -11.04 & -7.98 & 0.54 \\ 9.84 & 47.20 & -5.98 \end{bmatrix}, \|T_i\|_\infty = 1.10, i = \{3, 6\}.$$

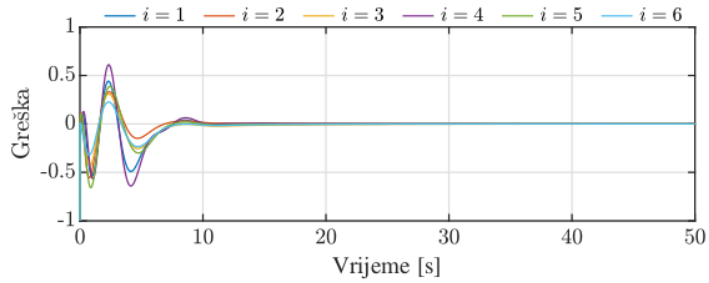


(a) Prva komponenta signala greške  $\tilde{y}_i$ .

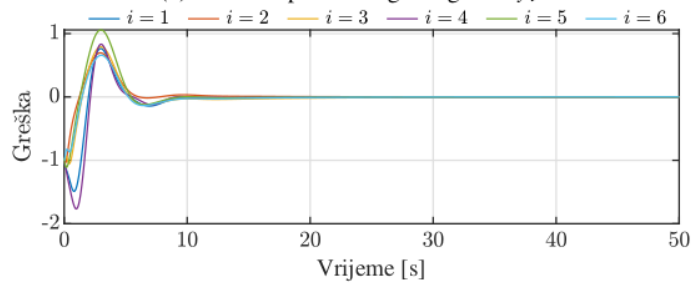


(b) Druga komponenta signala greške  $\tilde{y}_i$ .

Slika 5.7: Greške agenata u praćenju referentnog signala u slučaju ROF protokola kada su matrice egzosistema nestabilne.



(a) Prva komponenta signala greške  $\tilde{y}_i$ .



(b) Druga komponenta signala greške  $\tilde{y}_i$ .

Slika 5.8: Greške agenata u praćenju referentnog signala u slučaju OF protokola kada su matrice egzosistema nestabilne.

Slike 5.7 i 5.8 prikazuju grešku u praćenju referentnog signala pratilaca. Kao što se može vidjeti, uprkos tome što su agenti nestabilni u otvorenoj sprezi, signal greške svakog pratioca asimptotski konvergira ka nuli. Trajektorije izlaza nisu prikazane budući da eksponencijalno rastu.

## 5.2 OCC problem

### Primjer 1: Opšti linearni model

Posmatra se MAS koji se sastoji od četiri pratilaca  $\mathbb{F} = \{1, 2, 3, 4\}$  i tri lidera  $\mathbb{L} = \{5, 6, 7\}$ , čija je mrežna topologija opisana usmjerenim grafom  $\mathcal{G}$  koji je definisan matricom Laplasijana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -1.5 & 0 & 0 & -1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Model lidera u prostoru stanja je zadat matricama

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

dok je matrica stanja egzosistema koji generiše poremećaj jednaka

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Dinamika pratilaca je definisana matricama

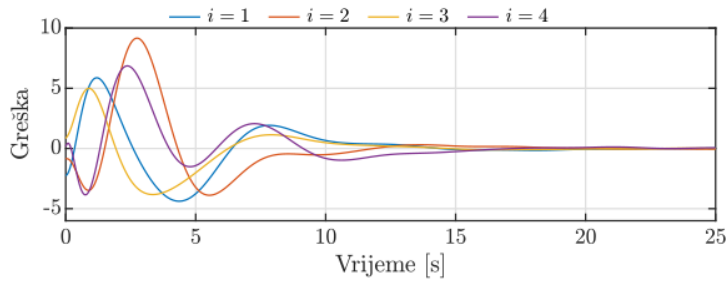
$$\begin{cases} A_i = \begin{bmatrix} 0.3 & -2 \\ 0.1 & -0.2 \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} 1.8 \\ 0.9 \end{bmatrix} \\ C_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, i = \{1, 3\}, \\ A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.25 & 0.25 & 1 \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \\ C_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, i = \{2, 4\}, \\ E_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ i } Q_i = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ za } i = \{1, 2, 3, 4\} . \end{cases}$$

Rješenja prvog para regulatorskih jednačina (4.4) su:

$$\begin{aligned} \Pi_i^\zeta &= \begin{bmatrix} 1.00 & 1.00 \\ 0.13 & 0.92 \end{bmatrix}, \Gamma_i^\zeta = \begin{bmatrix} 1.09 & -1.36 \end{bmatrix}, \text{ za } i = \{1, 3\}, \\ \Pi_i^\zeta &= \begin{bmatrix} 1.00 & 1.00 \\ 0.17 & 0.57 \\ -0.17 & 1.21 \end{bmatrix}, \Gamma_i^\zeta = \begin{bmatrix} 1.83 & -4.57 \end{bmatrix}, \text{ za } i = \{2, 4\}, \end{aligned}$$

dok su rješenja drugog para regulatorskih jednačina:

$$\begin{aligned} \Pi_1^d &= \begin{bmatrix} -1.00 & 1.00 \\ 0.19 & 1.15 \end{bmatrix}, \Pi_2^d = \begin{bmatrix} -1.00 & 1.00 \\ -0.30 & 0.48 \\ 0.39 & 0.64 \end{bmatrix}, \\ \Pi_3^d &= \begin{bmatrix} -1.00 & 1.00 \\ 0.23 & 0.63 \end{bmatrix}, \Pi_4^d = \begin{bmatrix} -1.00 & 1.00 \\ -0.13 & 0.21 \\ -0.48 & 0.35 \end{bmatrix}, \\ \Gamma_1^d &= \begin{bmatrix} -1.29 & 0.56 \end{bmatrix}, \Gamma_2^d = \begin{bmatrix} -2.70 & -2.48 \end{bmatrix}, \\ \Gamma_3^d &= \begin{bmatrix} -1.25 & -0.57 \end{bmatrix}, \Gamma_4^d = \begin{bmatrix} -1.87 & -3.21 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$


 Slika 5.9: Lokalne *containment* greške agenata.

Parametri algoritama za dizajn protokola su sljedeći:  $\gamma_i = 1.5$ ,  $\epsilon_i = 10^2$ ,  $\tilde{\epsilon}_i = 10^3$  i  $\tilde{\gamma}_i = 1.41$ , za svako  $i \in \mathbb{F}$ . Može se uočiti da parametar  $\gamma_i$  zadovoljava uslov  $\gamma_i < \gamma^*$ , budući da je  $\gamma^* = 2.21$ . Praćenjem procedure za dizajn koja je prezentovana u Algoritmu 4.2 dobijaju se sljedeća pojačanja opservera

$$L_1^x = \begin{bmatrix} 10.68 \\ -7.19 \end{bmatrix}, L_2^x = \begin{bmatrix} 35.63 \\ 76.91 \\ 106.21 \end{bmatrix}, L_3^x = \begin{bmatrix} 22.16 \\ -3.30 \end{bmatrix}, L_4^x = \begin{bmatrix} 40.12 \\ 76.28 \\ 105.35 \end{bmatrix},$$

$$L_1^d = \begin{bmatrix} 13.64 \\ 3.72 \end{bmatrix}, L_2^d = \begin{bmatrix} 1.20 \\ 14.09 \end{bmatrix}, L_3^d = \begin{bmatrix} 9.19 \\ 10.75 \end{bmatrix}, L_4^d = \begin{bmatrix} -3.65 \\ 13.66 \end{bmatrix},$$

$$L_i^\zeta = \begin{bmatrix} -78.79 \\ 9.62 \end{bmatrix}, i \in \mathbb{F},$$

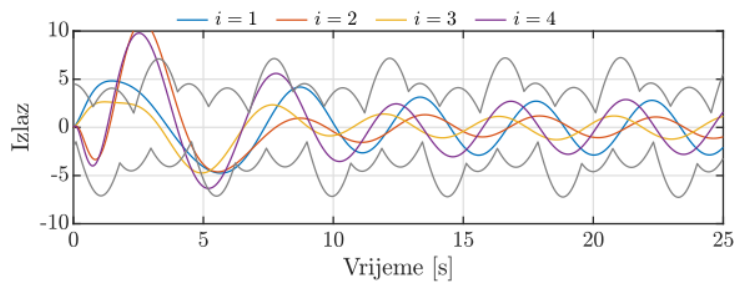
i pojačanja upravljačkog signala

$$K_i^x = \begin{bmatrix} 1.18 & -4.75 \end{bmatrix}, i = \{1, 3\},$$

$$K_i^x = \begin{bmatrix} -0.27 & 0.33 & -6.71 \end{bmatrix}, i = \{2, 4\}.$$

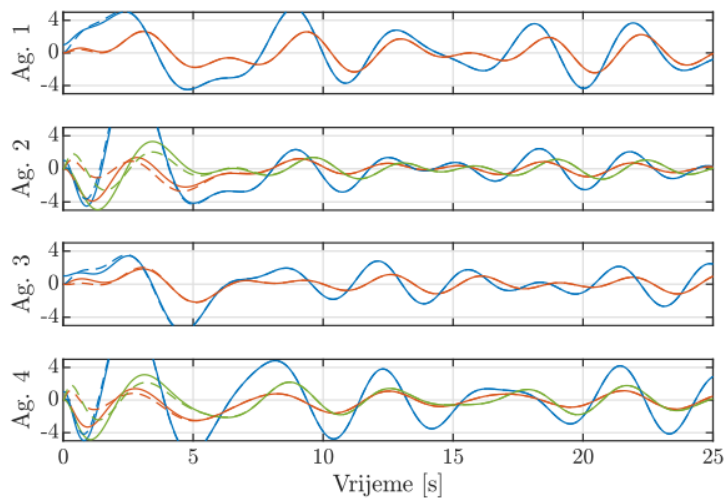
Za navedene parametre, vrijednosti  $\mathcal{H}_\infty$  normi iznose  $\|T_1\|_\infty = \|T_3\|_\infty = 1.2084$  i  $\|T_2\|_\infty = \|T_4\|_\infty = 1.2244$ , što znači da je uslov stabilnosti (4.20) zadovoljen. Dodatno, budući da je matrica  $H + L^{xd}G$  Hurwitz stabilna, Lema 4.5 implicira da je OCC problem riješen.

Početna stanja podsistema su  $x_1(0) = [1 \ 0]^T$ ,  $x_2(0) = [1 \ 0 \ 0]^T$ ,  $x_3(0) = [1 \ 0]^T$ ,  $x_4(0) = [1 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\zeta_5(0) = [3 \ 1.5]^T$ ,  $\zeta_6(0) = [-0.5 \ -1.5]^T$ ,  $\zeta_7(0) = [-2 \ 1.5]^T$ , dok je početno stanje egzosistema koji generiše poremećaj  $d(0) = [0 \ 1]^T$ . Stanja opservera svih agenata su inicijalizovana na nulu. Sa slike 5.9 je evidentno da lokalne *containment* greške teže ka nuli. Trajektorije izlaza pratilaca su prikazane na slici 5.10. Kao što se može primijetiti, izlazi pra-

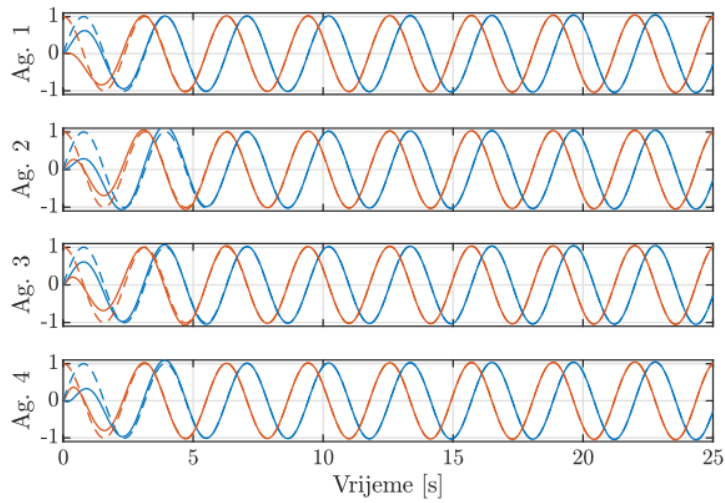


Slika 5.10: Izlazni signali pratilaca i konveksni omotač definisan izlazima lidera.

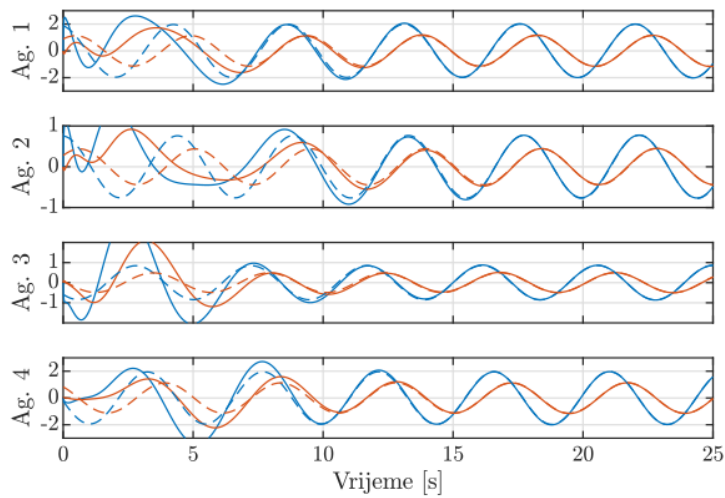
tilaca konvergiraju ka konveksnom omotaču koji je definisan izlazima lidera. Stanja pratilaca i opservera su prikazana na slikama 5.11-5.13. Može se uočiti da stanja lokalnih opservera konvergiraju ka stvarnim vrijednostima i da je za postizanje stacionarnog stanja potrebno oko 5 sekundi (slike 5.11 i 5.12). S druge strane, stanja distribuiranog opservera konvergiraju ka konveksnoj kombinaciji stanja lidera (slika 5.13).



Slika 5.11: Stanja pratilaca (puna linija) i opservera (isprekidana linija).



Slika 5.12: Stanja lokalnog opserversa poremećaja svakog agenta (puna linija) i stanja egzozistema koji generiše poremećaj (isprekidana linija).



Slika 5.13: Stanja distribuiranog opserversa (puna linija) i konveksna kombinacija stanja lidera (isprekidana linija).



### Primjer 2: Bežična Caltech testbed vozila

U ovom primjeru razmotren je multiagentni sistem koji se sastoji od pet pratilaca  $\mathbb{F} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  i tri lidera  $\mathbb{L} = \{6, 7, 8\}$ , čija je interakcija opisana usmjerenim grafom  $\mathcal{G}$  koji je definisan matricom Laplasijana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Matrice stanja egzosistema su iste kao u prethodnom primjeru. Jedina razlika je to što se u ovom primjeru izlaz lidera sastoji od dvije komponente, definisane matricom  $R = I_2$ . Sopstvene vrijednosti matrice  $S$  su jednake  $\pm j\sqrt{2}$ , što znači da će trajektorije lidera biti elipse u dvodimenzionalnoj ravni.

Pratioci u ovom primjeru su Caltech testbed vozila, koja se mogu opisati linearizovanim modelom šestog reda [29, 40, 105]. Kao u radu [105], i ovdje će biti pretpostavljeno da su vozila različite mase, i to  $m_i = 0.7$ , za  $i \in \{1, 3, 5\}$  i  $m_i = 0.8$ , za  $i \in \{2, 4\}$ . Ostali parametri su isti kao u [40]. Izlaz podsistema su prva dva stanja koja predstavljaju poziciju vozila po  $x$  i  $y$  koordinati u globalnom koordinatnom sistemu, tj.  $C_i = [I_2 \ 0_{2 \times 4}]$ . Uticaj poremećaja na vozila je definisan matricama

$$E_i = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad Q_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \forall i \in \mathbb{F}.$$

Rješenja prvog para regulatorskih jednačina (4.4) su

$$\begin{aligned} \Pi_i^\zeta &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4.67 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3.67 & -3 & -1 & -10.33 \end{bmatrix}^T, \quad \Gamma_i^\zeta = \begin{bmatrix} -0.25 & -0.55 \\ -0.52 & -0.87 \end{bmatrix}, \quad i \in \{1, 3, 5\}, \\ \Pi_i^\zeta &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5.33 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4.33 & -3 & -1 & -11.67 \end{bmatrix}^T, \quad \Gamma_i^\zeta = \begin{bmatrix} -0.30 & -0.601 \\ -0.62 & -0.95 \end{bmatrix}, \quad i \in \{2, 4\}, \end{aligned}$$

dok su rješenja drugog para jednačina

$$\begin{aligned} \Pi_i^d &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 14 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1.5 & 1 & -2 & 28 \end{bmatrix}^T, \Gamma_i^d = \begin{bmatrix} 1.49 & 0.05 \\ -0.29 & 1.83 \end{bmatrix}, i \in \{1, 3, 5\}, \\ \Pi_i^d &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 16 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1.5 & 1 & -2 & 32 \end{bmatrix}^T, \Gamma_i^d = \begin{bmatrix} 1.70 & 0.07 \\ -0.37 & 2.08 \end{bmatrix}, i \in \{2, 4\}. \end{aligned}$$

Za zadati graf  $\mathcal{G}$  dobija se  $\gamma^* = 2$ , pa se mogu usvojiti sljedeće vrijednosti parametara algoritma za dizajn:  $\gamma_i = 1.2$ ,  $\epsilon_i = 400$ ,  $\tilde{\epsilon}_i = 10^3$  i  $\tilde{\gamma}_i = 1.0541$ , za svako  $i \in \mathbb{F}$ . Praćenjem procedure za dizajn koja je izložena u Algoritmu 4.2, dobijaju se sljedeća pojačanja opservera

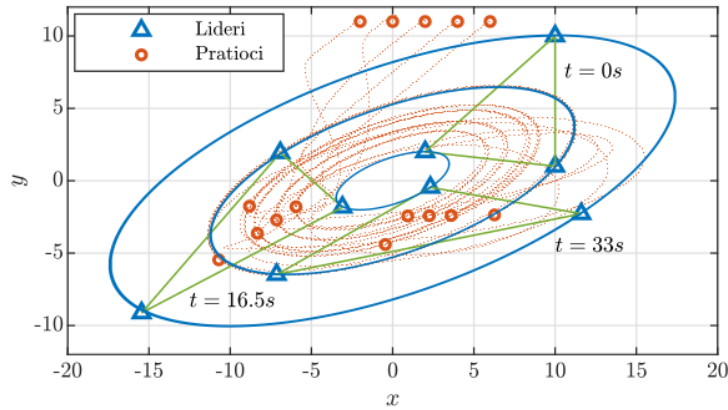
$$\begin{aligned} L_i^x &= \begin{bmatrix} 27.96 & 12.01 & -7.20 & 15.03 & 5.28 & -0.13 \\ -22.80 & 42.52 & 22.27 & -12.90 & 18.89 & 0.18 \end{bmatrix}^T, i \in \{1, 3, 5\}, \\ L_i^x &= \begin{bmatrix} 28.15 & 12.12 & -7.09 & 15.29 & 5.77 & -0.12 \\ -22.78 & 42.44 & 22.31 & -12.59 & 18.77 & 0.16 \end{bmatrix}^T, i \in \{2, 4\}, \\ L_i^d &= \begin{bmatrix} -12.08 & -11.66 \\ 1.22 & 22.73 \end{bmatrix}, i \in \{1, 3, 5\}, L_i^d = \begin{bmatrix} -12.18 & -11.59 \\ 1.05 & 22.72 \end{bmatrix}, i \in \{2, 4\}, \\ L_i^\zeta &= \begin{bmatrix} -112.49 & 7.72 \\ 7.72 & -89.43 \end{bmatrix}, i \in \mathbb{F}, \end{aligned}$$

i pojačanja kontrolera

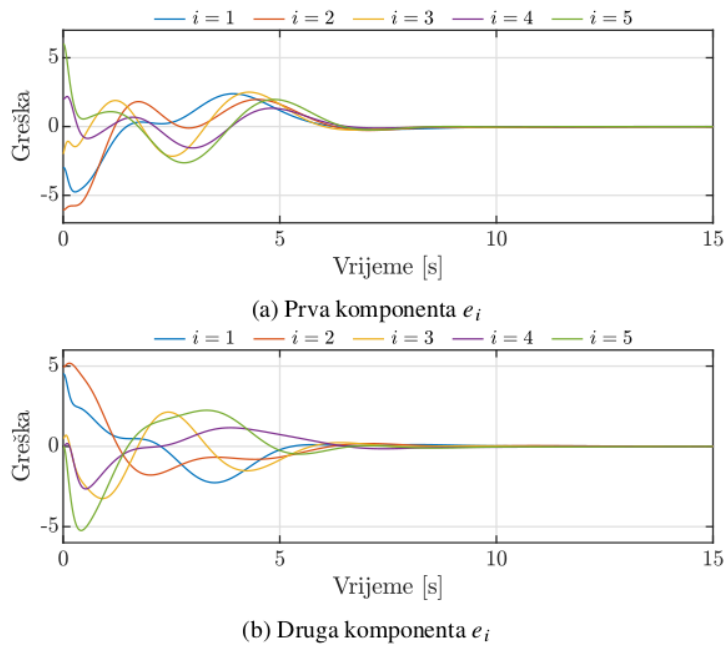
$$\begin{aligned} K_i^x &= \begin{bmatrix} -59.67 & -55.12 & 0.26 & -8.17 & -5.28 & -0.03 \\ -53.63 & -57.85 & -0.63 & -4.27 & -9.18 & -0.25 \end{bmatrix}, i \in \{1, 3, 5\}, \\ K_i^x &= \begin{bmatrix} -69.85 & -62.54 & 0.41 & -10.64 & -5.00 & 0.06 \\ -63.43 & -65.58 & -0.46 & -6.30 & -9.34 & -0.17 \end{bmatrix}, i \in \{2, 4\}, \end{aligned}$$

dok se  $K_i^d$  i  $K_i^\zeta$  određuju na osnovu relacija (4.15). Za data pojačanja, vrijednosti  $\mathcal{H}_\infty$  normi iznose:  $\|T_1\|_\infty = \|T_3\|_\infty = \|T_5\|_\infty = 1.07$  i  $\|T_2\|_\infty = \|T_4\|_\infty = 1.06$ , iz čega se može zaključiti da je uslov za stabilnost (4.20) zadovoljen.

Početno stanje  $i$ -tog pratioca je  $x_i(0) = [-5 + 2i \ 11 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $i \in \mathbb{F}$ , dok je početno stanje egzosistema koji generiše poremećaj  $d(0) = [0 \ 1]^T$ . Dodatno, stanja opservera svih pratilaca su inicijalizovana na nulu.

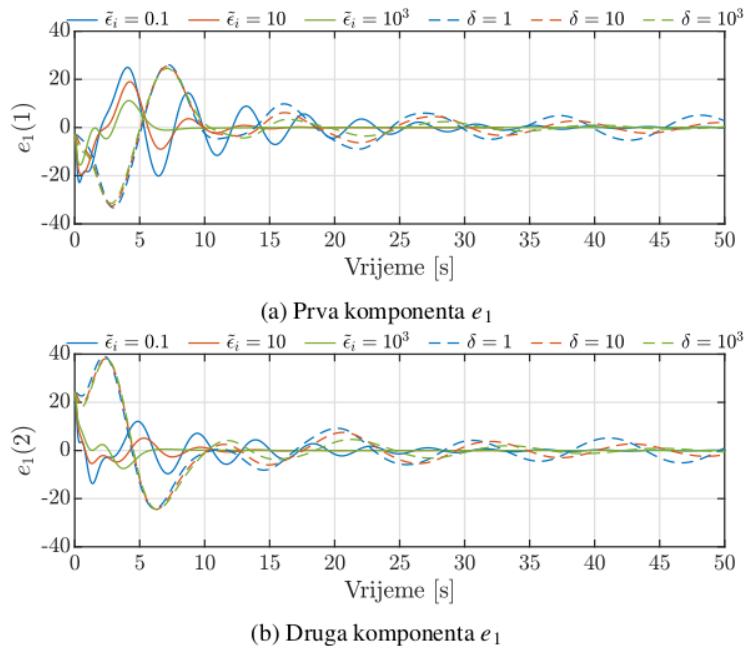


Slika 5.14: Trajektorije lidera i pratilaca u ravni. Lideri su označeni trouglovima i kreću se po eliptičnim putanjama, pri čemu formiraju konveksni omotač u obliku vremenski-promjenljivog trougla. Pratioci konvergiraju ka ovom trouglu i ostaju unutar njega.



Slika 5.15: Lokalne *containment* greške agenata.

Kretanje agenata u dvodimenzionalnoj ravni je prikazano na slici 5.14, gdje trouglovi i krugovi označavaju lidera i pratioce, respektivno. Može se uočiti da se pratioci inicijalno ne nalaze unutar konveksnog omotača kojeg generišu lideri. Međutim, u stacionarnom stanju trajektorije pratilaca konvergiraju i ostaju unutar konveksnog omotača. Sa slika 5.15a i 5.15b može se primijetiti da lokalne *containment* greške agenata konvergiraju ka nuli, pa se na osnovu Leme 4.3 može zaključiti da je OCC problem riješen.

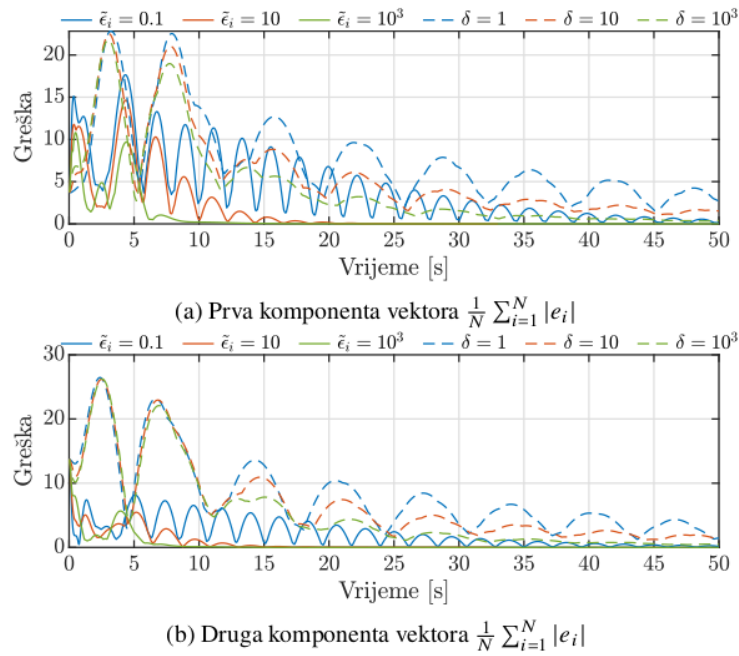


Slika 5.16: Komparacija *containment* greške prvog agenta u slučajevima kada se za dizajn koriste predloženi metod (puna linija) i *low-gain* metod (isprekidana linija).

### Primjer 3: Komparativna analiza

U ovom primjeru je sprovedena dodatna analiza multiagentnog sistema iz prethodnog primjera koja za cilj ima upoređivanje performansi predloženog postupka za određivanje pojačanja sa drugim relevantnim metodom u literaturi. Vrijednosti pojačanja lokalnog opservera su nepromijenjene, dok su pojačanja distribuiranog opservera određena za različite vrijednosti parametra  $\tilde{\epsilon}_i$ . Performanse sistema za tako dobijene parametre su upoređene sa performansama sistema u slučaju kada se za dizajn parametara koristi *low-gain* metod [26], kod kojeg se prvo određuje  $K_i^x$  na takav način da matrica  $A_i + B_i K_i^x$  bude stabilna. Konkretno, za računanje pojačanja  $K_i^x$  korišćena je standardna LQR Rikatijeva jednačina, za  $Q = \delta I$  i  $R = I$ , pri čemu su razmotrene različite vrijednosti parametra  $\delta$ . Nakon određivanja matrice  $K_i^x$ , pojačanja opservera se dobijaju na osnovu Rikatijeve jednačine sa podesivim parametrom koja je opisana u [26]. Radi preglednosti i konciznosti, vrijednosti pojačanja opservera i kontrolera nisu prikazane.

Slike 5.16 i 5.17 prikazuju *containment* grešku prvog agenta i srednju apsolutnu *containment* grešku svih agenata, respektivno, za različite vrijednosti parametara  $\tilde{\epsilon}_i$  and  $\delta$ . Kao što se može primijetiti, sa povećavanjem parametra  $\tilde{\epsilon}_i$ , sistem brže ulazi u stacionarno stanje. Ovaj rezultat je očekivan, budući da se u tom slučaju povećava i pojačanje  $L_i^z$ . U slučaju



Slika 5.17: Komparacija srednje apsolutne *containment* greške u slučajevima kada se za dizajn koriste predloženi metod (puna linija) i *low-gain* metod (isprekidana linija).

kada se koristi drugi metod, može se uočiti da povećavanje parametra  $\delta$  rezultira nešto bržim odzivom. Međutim, važno je primijetiti da greške sporije konvergiraju ka nuli i da imaju veći preskok u odnosu na predloženi metod. Glavni razlog za razliku u performansama leži u činjenici da se u predloženom metodu prvo određuje pojačanje  $L_i^{\zeta}$ , nakon čega se računa  $K_i^x$  koristeći  $\mathcal{H}_{\infty}$  SOF algoritam. Sa druge strane, kod *low-gain* metoda, pojačanje  $K_i^x$  koje stabilizuje matricu  $A_i + B_i K_i^x$  se određuje proizvoljno, nakon čega se pojačanje  $L_i^{\zeta}$  određuje podešavanjem parametra Rikatijske jednačine sve dok se ne obezbijedi stabilnost sistema.

# Zaključak

U disertaciji su prezentovani distribuirani upravljački protokoli kojima se rješava problem kooperativne regulacije izlaza u linearnim introspektivnim i neintrospektivnim multiagentnim sistemima. Predložena rješenja su zasnovana na distribuiranom opserversu, za čiju je implementaciju potrebno da agenti poznaju samo informacije o izlazima svojih susjeda. Na ovaj način se značajno smanjuje komunikaciono opterećenje, jer se ne zahtijeva dodatna razmjena stanja kontrolera. Štaviše, u scenarijima u kojima agenti putem relativnih senzora dobijaju informacije o izlazima svojih susjeda, predloženi protokoli se mogu implementirati bez uspostavljanja komunikacione mreže. U tezi je primjenom  $\mathcal{H}_\infty$  teorije upravljanja izveden lokalni uslov za stabilnost, čija ispunjenost na nivou pojedinačnog agenta garantuje stabilnost cjelokupnog multiagentnog sistema. U cilju zadovoljenja ovog uslova, razvijeni su i odgovarajući algoritmi za sintezu parametara kontrolera. Analitički je pokazano da se predloženim protokolima može unaprijed garantovati rješivost COR problema za: i) introspektivne agente sa opštom linearnom dinamikom, ii) neintrospektivne linearne agente koji su stabilni u otvorenoj sprezi, za široku klasu referentnih signala i poremećaja od praktičnog interesa. Efikasnost prezentovanih upravljačkih protokola je potvrđena rezultatima brojnih simulacija.

U tezi je takođe prezentovan distribuirani upravljački protokol kojim se rješava *output containment control* problem u linearnim heterogenim multiagentnim sistemima na koje djeluju eksterni poremećaji. U predloženom OCC protokolu se putem distribuiranog opserversa vrši estimacija konveksne kombinacije stanja lidera, dok se na nivou svakog agenta koristi lokalni opservers za estimaciju i kompenzaciju eksternih poremećaja. Predloženo rješenje je takođe zasnovano na pretpostavci da agenti raspolažu samo informacijama o izlazima svojih susjeda, što ima niz prednosti s aspekta praktične implementacije kontrolera. U tezi je izveden dovoljan uslov za stabilnost multiagentnog sistema, na bazi kojeg je predložen algoritam za sintezu parametara kontrolera. Takođe su date teorijske garancije za rješivost OCC problema predloženim upravljačkim protokolom za širok spektar agenata i topologija

grafova. Efikasnost predloženog upravljačkog protokola i metodologije za sintezu pojačanja je potvrđena rezultatima brojnih simulacija, koje između ostalog uključuju i neke primjere praktičnih multiagentnih sistema.

Metode koje su razvijene za sintezu pojačanja upravljačkih protokola sadrže više parametara koji pružaju određenu fleksibilnost pri podešavanju performansi sistema. Međutim, uprkos tome, nekad nije moguće obezbijediti adekvatne performanse, što prevashodno zavisi od dinamike samog sistema i komunikacione topologije između agenata. U tom smislu, dalja istraživanja će biti usmjerena ka razvoju optimizacionih algoritama koji će omogućiti postavljanje polova multiagentnog sistema u željeni region kompleksne ravni, čime bi se postigao željeni stepen ekponencijalne stabilnosti. Pored toga, istraživanja će ići u pravcu relaksacije prezentovanog lokalnog uslova stabilnosti koji zavisi od druge najmanje sopstvene vrijednosti Laplasijana grafa. Na kraju, treba pomenuti da predloženi protokoli nisu potpuno distribuirane prirode, jer se u postupku sinteze kontrolera koristi globalna informacija o komunikacionom grafu. Shodno tome, buduća istraživanja će biti usmjerena i na razvoj adaptivnih tehnika za podešavanje pojačanja koje bi omogućile razvoj potpuno distribuiranog kontrolera.

U sprovedenim istraživanjima je podrazumijevano da je komunikaciona topologija multiagentnog sistema vremenski-invarijantna. Međutim, u praksi, komunikacioni graf može biti vremenski-promjenljiv, posebno u mobilnim multirobotskim sistemima gdje može doći do prekida komunikacije zbog velike udaljenosti između agenata ili nekih drugih faktora. Pored toga, pretpostavljeno je da u komunikaciji između agenata nema kašnjenja, što u nekim praktičnim scenarijima nije realna pretpostavka. Samim tim, od praktičnog interesa je proučavati vremenski-promjenljive grafove i komunikaciona kašnjenja, što će biti jedan od budućih istraživačkih pravaca. Interesantan istraživački pravac mogu predstavljati i grafovi sa dinamičkim granama. Ovakvi grafovi nalaze primjenu u multiagentnim sistemima kod kojih agenti nisu povezani komunikacionim linkovima, već fizičkim vezama koje se modeluju diferencijalnim jednačinama.

U multiagentnim sistemima koji su razmatrani u ovoj tezi, pretpostavljeno je da su interakcije između agenata isključivo kooperativne prirode. Međutim, u brojnim realnim scenarijima, kao što su socijalne mreže, multirobotski sistemi i biološke mreže, pored kooperativnih, mogu postojati i antagonističke interakcije. Kod ovakvih multiagentnih sistema, interakcije između agenata se modeluju označenim grafovima, gdje pozitivni težinski koeficijenti odgovaraju kooperativnim, a negativni koeficijenti antagonističkim relacijama. Rezultati dobijeni na označenim grafovima su generalniji i sadrže rezultate na konvencionalnim grafovima kao specijalan slučaj. Sa druge strane, na označenim grafovima se mogu formulisati i neki novi

## Zaključak

---

problemi upravljanja multiagentnim sistemima, kao što su bipartitni/multipartitni konsenzus ili bipartitni/multipartitni *containment control*. Iz tog razloga, jedan od budućih ciljeva istraživanja biće i generalizacija postojećih rezultata na označene grafove.



## Bibliografija

- [1] L. Martinović, Ž. Žečević, and B. Krstajić, “Distributed Observer Approach to Cooperative Output Regulation of Multi-Agent Systems Without Exchange of Controller States,” *IEEE Access*, vol. 11, pp. 81419–81433, 2023.
- [2] L. Martinović, Z. Zečević, and B. Krstajić, “Output containment control in heterogeneous multi-agent systems without exchange of controller states,” *European Journal of Control*, p. 100889, aug 2023.
- [3] H. Cai, <sup>1</sup>Y. Su, and J. Huang, *Cooperative Control of Multi-agent Systems*. Advances in Industrial Control, Cham: Springer International Publishing, 2022.
- [4] M. Lu and L. Liu, “Leader-following consensus of multiple uncertain euler-lagrange systems with unknown dynamic leader,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 64, pp. 4167–4173, oct 2019.
- [5] H. Cai and J. Huang, “The leader-following consensus for multiple uncertain Euler-Lagrange systems with an adaptive distributed observer,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 61, no. 10, pp. 3152–3157, 2016.
- [6] M. Long, H. Su, and Z. Zeng, “Distributed Observer-Based Leader-Follower Consensus of Multiple Euler-Lagrange Systems,” *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 35, pp. 157–168, jan 2024.
- [7] C. He and J. Huang, “Leader-following consensus of multiple rigid body systems by a sampled-data distributed observer,” *Automatica*, vol. 146, p. 110658, dec 2022.
- [8] H. Cai and J. Huang, “Leader-following attitude consensus of multiple rigid body systems by attitude feedback control,” *Automatica*, vol. 69, pp. 87–92, jul 2016.
- [9] M. Lu and L. Liu, “Leader-following attitude consensus of multiple rigid spacecraft systems under switching networks,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 65, pp. 839–845, feb 2020.

- [10] Y. Su and J. Huang, "Cooperative adaptive output regulation for a class of nonlinear uncertain multi-agent systems with unknown leader," *Systems & Control Letters*, vol. 62, pp. 461–467, jun 2013.
- [11] M. Lu and J. Huang, "Cooperative Global Robust Output Regulation for a Class of Nonlinear Multi-Agent Systems with a Nonlinear Leader," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 61, pp. 3557–3562, nov 2016.
- [12] T. Liu and J. Huang, "Cooperative robust output regulation for a class of nonlinear multi-agent systems subject to a nonlinear leader system," *Automatica*, vol. 108, p. 108501, oct 2019.
- [13] H. Haghshenas, M. A. Badamchizadeh, and M. Baradarannia, "Containment control of heterogeneous linear multi-agent systems," *Automatica*, vol. 54, pp. 210–216, apr 2015.
- [14] <sup>12</sup> R. Olfati-Saber and R. M. Murray, "Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, pp. 1520–1533, sep 2004.
- [15] <sup>12</sup> R. Olfati-Saber, J. A. Fax, and R. M. Murray, "Consensus and cooperation in networked multi-agent systems," *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, pp. 215–233, jan 2007.
- [16] <sup>1</sup> W. Ren and R. W. Beard, "Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, pp. 655–661, may 2005.
- [17] <sup>1</sup> Q. Wang, Z. Duan, J. Wang, and G. Chen, "LQ Synchronization of Discrete-Time Multiagent Systems: A Distributed Optimization Approach," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 64, pp. 5183–5190, dec 2019.
- [18] J. Lunze, *Networked control of multi-agent systems*. Bookmundo, 2019.
- [19] L. Martinovic, Z. Zecevic, and B. Krstajic, "Distributed Control Strategy for Multi-Agent Systems Using Consensus Among Followers," *2020 24th International Conference on Information Technology, IT 2020*, feb 2020.
- [20] S. Luo, X. Xu, L. Liu, and G. Feng, "Leader-Following Consensus of Heterogeneous Linear Multiagent Systems With Communication Time-Delays via Adaptive Distributed Observers," *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 52, pp. 13336–13349, dec 2022.

- [21] S. Hu, J. Qiu, X. Chen, F. Zhao, and X. Jiang, "Dynamic event-triggered control for leader-following consensus of multiagent systems with the estimator," *IET Control Theory & Applications*, vol. 16, pp. 475–484, mar 2022.
- [22] Y. Su and J. Huang, "Cooperative output regulation of linear multi-agent systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, pp. 1062–1066, apr 2012.
- [23] Y. Su and J. Huang, "Cooperative output regulation of linear multi-agent systems by output feedback," *Systems & Control Letters*, vol. 61, pp. 1248–1253, dec 2012.
- [24] L. Martinovic, Z. Zecevic, and B. Krstajic, "Regulated Output Synchronization of Multi-Agent Systems via Output Feedback," *2022 26th International Conference on Information Technology, IT 2022*, 2022.
- [25] F. Adib Yaghmaie, F. L. Lewis, and R. Su, "Output regulation of linear heterogeneous multi-agent systems via output and state feedback," *Automatica*, vol. 67, pp. 157–164, may 2016.
- [26] M. Lu and L. Liu, "Cooperative output regulation of linear multi-agent systems by a novel distributed dynamic compensator," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 12, pp. 6481–6488, 2017.
- [27] M. Lu and L. Liu, "Distributed feedforward approach to cooperative output regulation subject to communication delays and switching networks," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, pp. 1999–2005, apr 2017.
- [28] Q. Wang, X. Dong, G. Wen, J. Lu, and Z. Ren, "Practical Output Containment of Heterogeneous Nonlinear Multiagent Systems Under External Disturbances," *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 53, pp. 5191–5201, aug 2023.
- [29] G. Wen, Y. Zhao, Z. Duan, W. Yu, and G. Chen, "Containment of higher-order multi-leader multi-agent systems: A dynamic output approach," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 61, pp. 1135–1140, apr 2016.
- [30] J. Zhang, Z. Peng, J. Hu, Y. Zhao, R. Luo, and B. K. Ghosh, "Internal reinforcement adaptive dynamic programming for optimal containment control of unknown continuous-time multi-agent systems," *Neurocomputing*, vol. 413, pp. 85–95, nov 2020.
- [31] S. M. Elkhider, S. El-Ferik, and A. W. A. Saif, "Containment Control of Multiagent Systems Subject to Denial of Service Attacks," *IEEE Access*, vol. 10, pp. 48102–48111, 2022.

- [32] J. Wu, L. Wang, and X. S. Zhan, "Bipartite Containment Disturbance Rejection Using Disturbance Observers," *IEEE Access*, vol. 10, pp. 127685–127694, 2022.
- [33] L. Martinovic, Z. Zecevic, and B. Krstajic, "Cooperative output regulation of multi-agent systems with single-integrator dynamics," *2020 28th Telecommunications Forum, TELFOR 2020 - Proceedings*, nov 2020.
- [34] L. Sabattini, C. Secchi, M. Cocetti, A. Levratti, and C. Fantuzzi, "Implementation of Coordinated Complex Dynamic Behaviors in Multirobot Systems," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 31, pp. 1018–1032, aug 2015.
- [35] L. Martinović, Ž. Zečević, and B. Krstajić, "Cooperative Tracking Control of Multi-Agent Systems with General Linear Dynamics," *2021 25th International Conference on Information Technology, IT 2021*, feb 2021.
- [36] L. Sabattini, C. Secchi, and C. Fantuzzi, "Coordinated dynamic behaviors for multi-robot systems with collision avoidance," *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 47, no. 12, pp. 4062–4073, 2017.
- [37] <sup>1</sup> L. Martinović, Ž. Zečević, and B. Krstajić, "Cooperative tracking control of single-integrator multi-agent systems with multiple leaders," *European Journal of Control*, vol. 63, pp. 232–239, jan 2022.
- [38] M. Mesbahi and M. Egerstedt, *Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks*. Princeton University Press, 2010.
- [39] <sup>1</sup> K. Wang, "Distributed Time-Varying Output Formation Tracking Control for General Linear Multi-Agent Systems with Multiple Leaders and Relative Output-Feedback," *IEEE Access*, vol. 9, pp. 59586–59596, 2021.
- [40] W. Jiang, G. Wen, Z. Peng, T. Huang, and A. Rahmani, "Fully distributed formation-containment control of heterogeneous linear multiagent systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 64, pp. 3889–3896, sep 2019.
- [41] Z. Feng, G. Hu, X. Dong, and J. Lü, "Discrete-time adaptive distributed output observer for time-varying formation tracking of heterogeneous multi-agent systems," *Automatica*, vol. 160, p. 111400, feb 2024.
- [42] J. Lan, Y. J. Liu, D. Yu, G. Wen, S. Tong, and L. Liu, "Time-Varying Optimal Formation Control for Second-Order Multiagent Systems Based on Neural Network Observer and Reinforcement Learning," *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2022.

- [43] J. Zhang, W. Liu, and Y. Li, "Optimal Formation Control for Second-Order Multi-Agent Systems With Obstacle Avoidance," *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, vol. 10, pp. 563–565, feb 2023.
- [44] M. Hou and H. Shi, "The Adaptive Distributed Event-Triggered Observer Approach to Cooperative Output Regulation of Discrete-Time Linear Multi-Agent Systems under Directed Switching Networks," *IEEE Access*, 2020.
- [45] H. Liang, Y. Zhou, H. Ma, and Q. Zhou, "Adaptive distributed observer approach for cooperative containment control of nonidentical networks," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 49, pp. 299–307, feb 2019.
- [46] J. Huang, *Nonlinear output regulation: theory and applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004.
- [47] A. Isidori and C. I. Byrnes, "Output regulation of nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, no. 2, pp. 131–140, 1990.
- [48] B. A. Francis and W. M. Wonham, "The internal model principle of control theory," *Automatica*, vol. 12, pp. 457–465, sep 1976.
- [49] B. A. Francis, "The Linear Multivariable Regulator Problem," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 15, pp. 486–505, jul 1977.
- [50] H. Zhang, F. L. Lewis, and A. Das, "Optimal design for synchronization of cooperative systems: State feedback, observer and output feedback," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 56, pp. 1948–1952, aug 2011.
- [51] M. Mazouchi, M. B. Naghibi-Sistani, S. K. Hosseini Sani, F. Tatari, and H. Modares, "Observer-based adaptive optimal output containment control problem of linear heterogeneous Multiagent systems with relative output measurements," *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 33, pp. 262–284, feb 2019.
- [52] H. Cai and G. Hu, "Distributed Robust Hierarchical Power Sharing Control of Grid-Connected Spatially Concentrated AC Microgrid," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 27, pp. 1012–1022, may 2019.
- [53] Y. Su, Y. Hong, and J. Huang, "A general result on the robust cooperative output regulation for linear uncertain multi-agent systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 58, no. 5, pp. 1275–1279, 2013.
- [54] J. Ma, X. Yu, L. Liu, H. Ji, and G. Feng, "Global Cooperative Output Regulation of

- Linear Multiagent Systems With Limited Bandwidth,” *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, vol. 9, pp. 1017–1028, jun 2022.
- [55] T. Liu and J. Huang, “An output-based distributed observer and its application to the cooperative linear output regulation problem,” *Control Theory and Technology*, vol. 17, pp. 62–72, feb 2019.
- [56] <sup>1</sup> Y. Yan and J. Huang, “Cooperative robust output regulation problem for discrete-time linear time-delay multi-agent systems,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 28, pp. 1035–1048, feb 2018.
- [57] G. Song, P. Shi, and C. P. Lim, “Distributed Fault-Tolerant Cooperative Output Regulation for Multiagent Networks Via Fixed-Time Observer and Adaptive Control,” *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, vol. 9, pp. 845–855, jun 2022.
- [58] <sup>1</sup> G. S. Seyboth, W. Ren, and F. Allgöwer, “Cooperative control of linear multi-agent systems via distributed output regulation and transient synchronization,” *Automatica*, vol. 68, pp. 132–139, jun 2016.
- [59] H. F. Grip, T. Yang, A. Saberi, and A. A. Stoorvogel, “Output synchronization for heterogeneous networks of non-introspective agents,” *Automatica*, vol. 48, pp. 2444–2453, oct 2012.
- [60] Y. Su, “Output Feedback Cooperative Control for Linear Uncertain Multi-Agent Systems With Nonidentical Relative Degrees,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 61, <sup>1</sup> pp. 4027–4033, dec 2016.
- [61] L. Wang, C. Wen, and H. Su, “Cooperative semiglobal robust output regulation of non-introspective nonlinear agents with partial normal form and state-dependent high-frequency gain,” *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, vol. 6, pp. 388–402, mar 2019.
- [62] <sup>1</sup> J. Zhang, Z. Chen, H. Zhang, and T. Feng, “Coupling effect and pole assignment in trajectory regulation of multi-agent systems,” *Automatica*, vol. 125, p. 109465, mar 2021.
- [63] <sup>1</sup> X. Li, S. Xu, H. Gao, and H. Cai, “Distributed Tracking of Leader-follower Multiagent Systems Subject to Disturbed Leaders Information,” *IEEE Access*, 2020.
- [64] <sup>1</sup> Y. Su and J. Huang, “Cooperative robust output regulation of a class of heterogeneous linear uncertain multi-agent systems,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 24, pp. 2819–2839, nov 2014.

- [65] H. F. Grip, A. Saberi, and A. A. Stoorvogel, "Synchronization in networks of minimum-phase, non-introspective agents without exchange of controller states: Homogeneous, heterogeneous, and nonlinear," *Automatica*, vol. 54, pp. 246–255, apr 2015.
- [66] Y. Lv, G. Wen, T. Huang, and Z. Duan, "Adaptive attack-free protocol for consensus tracking with pure relative output information," *Automatica*, vol. 117, p. 108998, jul 2020.
- [67] <sup>1</sup>Y. Lv, G. Wen, and T. Huang, "Adaptive Protocol Design for Distributed Tracking with Relative Output Information: A Distributed Fixed-Time Observer Approach," *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, vol. 7, pp. 118–128, mar 2020.
- [68] <sup>1</sup>M. Lu, "A Sensory Feedback Based Discrete Distributed Observer to Cooperative Output Regulation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 67, pp. 4762–4769, sep 2022.
- [69] P. Yu, K. Z. Liu, X. Liu, X. Li, M. Wu, and J. She, "Robust Consensus Tracking Control of Uncertain Multi-Agent Systems With Local Disturbance Rejection," *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, vol. 10, pp. 427–438, feb 2023.
- [70] C. Huang and X. Ye, "Cooperative output regulation of heterogeneous multi-agent systems: An  $H_\infty$  criterion," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 59, no. 1, pp. 267–273, 2014.
- [71] <sup>1</sup>X. Li, Y. C. Soh, L. Xie, and F. L. Lewis, "Cooperative Output Regulation of Heterogeneous Linear Multi-Agent Networks via  $H_\infty$  Performance Allocation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 64, pp. 683–696, feb 2019.
- [72] Y. Li, X. Wang, J. Xiang, and W. Wei, "Synchronised output regulation of leader-following heterogeneous networked systems via error feedback," *International Journal of Systems Science*, vol. 47, pp. 755–764, mar 2016.
- [73] H. W. Knobloch, D. Flockerzi, and A. Isidori, "Topics in Control Theory," *Topics in Control Theory*, 1993.
- [74] Z. Ding, "Consensus disturbance rejection with disturbance observers," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 62, pp. 5829–5837, sep 2015.
- [75] M. Dahleh, M. A. Dahleh, and G. Verghese, "Lectures on Dynamic Systems and Control," *MIT OpenCourseWare*, 2004.
- [76] L. El Ghaoui, F. Oustry, and M. AitRami, "A cone complementarity linearization

- algorithm for static output-feedback and related problems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 42, no. 8, pp. 1171–1176, 1997.
- [77] Y. Y. Cao, L. James, and Y. X. Sun, "Static Output Feedback Stabilization: An ILMI Approach," *Automatica*, vol. 34, pp. 1641–1645, dec 1998.
- [78] Y. He and Q. G. Wang, "An Improved ILMI Method for Static Output Feedback Control With Application to Multivariable PID Control," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no. 10, pp. 1678–1683, 2006.
- [79] X. Wang, Y. Hong, J. Huang, and Z. P. Jiang, "A distributed control approach to a robust output regulation problem for multi-agent linear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 55, pp. 2891–2895, dec 2010.
- [80] J. H. Kim and S. Lall, "Explicit Solutions to Separable Problems in Optimal Cooperative Control," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 60, pp. 1304–1319, may 2015.
- [81] W. Ding, G. Yan, and Z. Lin, "Collective motions and formations under pursuit strategies on directed acyclic graphs," *Automatica*, vol. 46, pp. 174–181, jan 2010.
- [82] K. Vladimír, "A Contribution to Matrix Quadratic Equations," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 17, no. 3, pp. 344–347, 1972.
- [83] J. Wang, Z. Duan, Y. Yang, and L. Huang, "Analysis and Control of Nonlinear Systems With Stationary Sets: Time-Domain and Frequency-domain Methods," *Analysis and Control of Nonlinear Systems With Stationary Sets: Time-Domain and Frequency-domain Methods*, pp. 1–311, jan 2009.
- [84] B. Zhou, G. Duan, and Z. Lin, "A parametric Lyapunov equation approach to the design of low gain feedback," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 6, pp. 1548–1554, 2008.
- [85] Z. Lin, "Low gain and low-and-high gain feedback: A review and some recent results," *2009 Chinese Control and Decision Conference, CCDC 2009*, 2009.
- [86] B. M. Chen, *H<sub>∞</sub> Control and Its Applications*, vol. 235. London: Springer Verlag, 1998.
- [87] S. Sun, F. Chen, and W. Ren, "Distributed Average Tracking in Weight-Unbalanced Directed Networks," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020.
- [88] B. Tian, Z. Li, and Q. Zong, "A Continuous Multivariable Finite-Time Control Scheme



- for Double Integrator Systems With Bounded Control Input,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 67, pp. 6068–6073, nov 2022.
- [89] Y. Wu, J. Hu, L. Xiang, K. Shi, and Q. Liang, “Finite-Time Output Regulation of Linear Heterogeneous Multi-Agent Systems Using Smooth Control,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 70, pp. 2894–2898, aug 2023.
- [90] Y. Wang, Y. Yuan, and J. Liu, “Finite-time leader-following output consensus for multi-agent systems via extended state observer,” *Automatica*, vol. 124, p. 109133, feb 2021.
- [91] H. Zhang, J. Zhang, Y. Cai, S. Sun, and J. Sun, “Leader-Following Consensus for a Class of Nonlinear Multiagent Systems Under Event-Triggered and Edge-Event Triggered Mechanisms,” *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 52, pp. 7643–7654, aug 2022.
- [92] X. Li, Z. Sun, Y. Tang, and H. R. Karimi, “Adaptive Event-Triggered Consensus of Multiagent Systems on Directed Graphs,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 66, pp. 1670–1685, apr 2021.
- [93] W. Xu, W. He, D. W. Ho, and J. Kurths, “Fully distributed observer-based consensus protocol: Adaptive dynamic event-triggered schemes,” *Automatica*, vol. 139, p. 110188, may 2022.
- [94] Z. Zuo, X. Cao, Y. Wang, and W. Zhang, “Resilient Consensus of Multiagent Systems Against Denial-of-Service Attacks,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 52, pp. 2664–2675, apr 2022.
- [95] M. S. Sadabadi and A. Gusrialdi, “Resilient average consensus on general directed graphs in presence of cyber-attacks,” *European Journal of Control*, vol. 68, p. 100669, nov 2022.
- [96] C. Deng and C. Wen, “Distributed Resilient Observer-Based Fault-Tolerant Control for Heterogeneous Multiagent Systems under Actuator Faults and DoS Attacks,” *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, vol. 7, pp. 1308–1318, sep 2020.
- [97] Z. Wang, “Consensus Control for Linear Multiagent Systems Under Delayed Transmitted Information,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 53, pp. 5670–5678, sep 2023.
- [98] X. Jiang, G. Xia, Z. Feng, and Z. Jiang, “Consensus Tracking of Data-Sampled Nonlinear Multi-Agent Systems with Packet Loss and Communication Delay,” *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, vol. 8, pp. 126–137, jan 2021.

- [99] T. Han, J. Li, Z. H. Guan, C. X. Cai, D. X. Zhang, and D. X. He, "Containment control of multi-agent systems via a disturbance observer-based approach," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 356, pp. 2919–2933, mar 2019.
- [100] Y. S. Ma, W. W. Che, C. Deng, and Z. G. Wu, "Observer-Based Fully Distributed Containment Control for MASs Subject to DoS Attacks," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 53, pp. 897–907, feb 2023.
- [101] X. Zhang and X. Liu, "Containment of linear multi-agent systems with disturbances generated by heterogeneous nonlinear exosystems," *Neurocomputing*, vol. 315, pp. 283–291, nov 2018.
- [102] S. Zuo, Y. Song, F. L. Lewis, and A. Davoudi, "Output Containment Control of Linear Heterogeneous Multi-Agent Systems Using Internal Model Principle," *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 47, pp. 2099–2109, aug 2017.
- [103] H. Chu, L. Gao, and W. Zhang, "Distributed adaptive containment control of heterogeneous linear multi-agent systems: an output regulation approach," *IET Control Theory & Applications*, vol. 10, pp. 95–102, jan 2016.
- [104] D. Wang, Z. Wang, Z. Wang, and W. Wang, "Design of Hybrid Event-Triggered Containment Controllers for Homogeneous and Heterogeneous Multiagent Systems," *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 51, pp. 4885–4896, oct 2021.
- [105] Y. Yang, H. Modares, D. C. Wunsch, and Y. Yin, "Optimal Containment Control of Unknown Heterogeneous Systems With Active Leaders," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 27, pp. 1228–1236, may 2019.
- [106] W. Sun, Y. Zhang, Y. Yang, and S. Zuo, "Resilience-based output containment control of heterogeneous MAS against unbounded attacks," *IET Control Theory & Applications*, vol. 17, pp. 757–768, apr 2023.
- [107] C. Yuan, S. Ilbeigi, and W. Zeng, " $H_\infty$  output containment control of heterogeneous multi-agent systems via distributed dynamic output feedback," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 355, pp. 5058–5081, aug 2018.
- [108] H. Liang, H. Li, Z. Yu, P. Li, and W. Wei, "Cooperative robust containment control for general discrete-time multi-agent systems with external disturbance," *IET Control Theory & Applications*, vol. 11, pp. 1928–1937, aug 2017.
- [109] W. Jiang, K. Liu, and T. Charalambous, "Multi-agent consensus with heterogeneous time-varying input and communication delays in digraphs," *Automatica*, vol. 135,

p. 109950, jan 2022.

- [110] Y. Zhao, Y. Zhou, P. Huang, and G. Chen, "Appointed-time and Attack-free Bipartite Synchronization of Generic Linear Multi-agent Systems over Directed Switching Networks," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022.
- [111] M. Zhang, A. Saberi, H. F. Grip, and A. A. Stoorvogel, " $H_\infty$  Almost Output Synchronization for Heterogeneous Networks Without Exchange of Controller States," *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, vol. 2, no. 4, pp. 348–357, 2015.
- [112] Y. Cao, W. Ren, and M. Egerstedt, "Distributed containment control with multiple stationary or dynamic leaders in fixed and switching directed networks," *Automatica*, vol. 48, pp. 1586–1597, aug 2012.
- [113] R. T. Rockafellar, *Convex analysis*. Princeton university press, 1997.
- [114] J. Ma and J. Hu, "Safe Consensus Control of Cooperative-Competitive Multi-Agent Systems via Differential Privacy," *Kybernetika*, vol. 58, no. 3, pp. 426–439, 2022.
- [115] X. Li, Y. C. Soh, and L. Xie, "Output-feedback protocols without controller interaction for consensus of homogeneous multi-agent systems: A unified robust control view," *Automatica*, vol. 81, pp. 37–45, jul 2017.
- [116] J. C. Willems, "Least Squares Stationary Optimal Control and the Algebraic Riccati Equation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 16, no. 6, pp. 621–634, 1971.
- [117] I. R. Petersen and C. V. Hollot, "High gain observers applied to problems in the stabilization of uncertain linear systems, disturbance attenuation and  $H_\infty$  optimization," *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 2, pp. 347–369, dec 1988.
- [118] J. Löfberg, "YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB," *Proceedings of the IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design*, pp. 284–289, 2004.

# Martinović-ETF

---

## ORIGINALITY REPORT

---

5%

SIMILARITY INDEX

---

### PRIMARY SOURCES

---

- |   |  |                  |
|---|--|------------------|
| 1 | <a href="#">Luka Martinović, Žarko Zečević, Božo Krstajić. "Distributed Observer Approach to Cooperative Output Regulation of Multi-Agent Systems Without Exchange of Controller States", IEEE Access, 2023</a><br><small>Crossref</small> | 621 words — 1%   |
| 2 | <a href="#">archive.org</a><br><small>Internet</small>   | 280 words — 1%   |
| 3 | <a href="#">dimagemaker.com</a><br><small>Internet</small>   | 253 words — 1%   |
| 4 | <a href="#">mipt.ru</a><br><small>Internet</small>   | 126 words — < 1% |
| 5 | <a href="#">hdl.handle.net</a><br><small>Internet</small>  | 67 words — < 1%  |
| 6 | <a href="#">dspace.mit.edu</a><br><small>Internet</small>  | 59 words — < 1%  |
| 7 | <a href="#">casa.colorado.edu</a><br><small>Internet</small>   | 53 words — < 1%  |
| 8 | <a href="#">Chenlu Zhang, Takehiro Sato, Eiji Oki. "Service Deployment for Parallelized Function Chains Considering Traffic-Dependent Delay", IEEE Transactions on Network and Service Management, 2023</a>                                | 52 words — < 1%  |

- 
- 9 Xiao, Fangzhou. "Biocontrol of Biomolecular Systems: Polyhedral Constraints on Binding's Regulation of Catalysis from Biocircuits to Metabolism.", California Institute of Technology, 2023  
ProQuest 49 words — < 1%
- 
- 10 Elizandra Karla Odorico. "Reguladores robustos recursivos para sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos com atraso no estado", Universidade de Sao Paulo, Agencia USP de Gestao da Informacao Academica (AGUIA), 2023  
Crossref Posted Content 48 words — < 1%
- 
- 11 Johan M. Melis, Igor Siwanowicz, Michael H. Dickinson. "Machine learning reveals the control mechanics of the insect wing hinge", Cold Spring Harbor Laboratory, 2024  
Crossref Posted Content 38 words — < 1%
- 
- 12 孝幸 石崎, 大樹 東藤. "マルチエージェントシステムに関する研究の最新動向", システム／制御／情報, 2023  
Publications 36 words — < 1%
- 
- 13 Chee, Andrew. "Algebraic, Analytical and Numerical Perspectives on the Universe of Integrable Systems", Cornell University, 2024  
ProQuest 33 words — < 1%
- 
- 14 Wang, Tengxiang. "Thermomechanical Analysis of Geothermal Heat Exchange Systems", Columbia University, 2023  
ProQuest 31 words — < 1%
- 
- 15 C.M. Lynch, T.P. Pavlic. "Generalizing the response and satisfaction threshold models for 28 words — < 1%

multiple task types: A maximal entropy approach", Cold Spring Harbor Laboratory, 2024

Crossref Posted Content

16 Olivier Sarbach, Manuel Tiglio. "Continuum and Discrete Initial-Boundary Value Problems and Einstein's Field Equations", Living Reviews in Relativity, 2012

Crossref

27 words — < 1%

17 Hong, Seungki. "Essays on Micro-Level Consumption Behavior and Open Economy Macroeconomics.", Columbia University, 2021

ProQuest

24 words — < 1%

18 Qing Xia, Josep M. Jornet. "Multi-hop Relaying Distribution Strategies for Terahertz-band Communication Networks: A Cross-layer Analysis", IEEE Transactions on Wireless Communications, 2021

Crossref

20 words — < 1%

19 poivs.tsput.ru

Internet

20 words — < 1%

20 Chen, Zhengdao. "Training Dynamics and Expressiveness of Certain Neural Networks", New York University, 2023

ProQuest

18 words — < 1%

21 Álvaro Roberto Gardenghi. "Transient modeling of vapor compression refrigeration systems for domestic applications", Universidade de Sao Paulo, Agencia USP de Gestao da Informacao Academica (AGUIA), 2020

Crossref Posted Content

14 words — < 1%

22 Takouda, Essodina. "Topics in a Delay Renewal Risk Model Perturbed by Diffusion Process with Dependence Between Claim Sizes and Inter-Occurrence Times", University of Johannesburg (South Africa), 2023

13 words — < 1%

---

23 Shekhovtsov, Alexander. "Exact and Partial Energy Minimization in Computer Vision", Czech Technical University, 2022 12 words — < 1%

ProQuest

---

24 ALI TOUMI. "Outils Mathématiques pour Economistes", Centre de publication universitaire 11 words — < 1%

Publications

---

25 Narges Torabi Golsefid, Maziar Salahi. "Efficiency decomposition in a three-stage network structure: Cooperative DEA, Nash bargaining game models and conic relaxations", RAIRO - Operations Research, 2021 11 words — < 1%

Crossref

---

26 [www.icmm.csic.es](http://www.icmm.csic.es) 11 words — < 1%

Internet

---

EXCLUDE QUOTES ON

EXCLUDE SOURCES OFF

EXCLUDE BIBLIOGRAPHY ON

EXCLUDE MATCHES < 10 WORDS